

Лекции по дисциплине

«Нечеткие модели и методы в менеджменте качества»

ВВЕДЕНИЕ

При изучении сложных систем, где человек играет существенную роль, действует так называемый принцип несовместимости: для получения существенных выводов о поведении сложной системы необходимо отказаться от высоких стандартов точности и строгости, которые характерны для сравнительно простых систем, и привлекать к ее анализу подходы, которые являются приближенными по своей природе.

При попытке формализовать человеческие знания исследователи столкнулись с проблемой, затруднявшей использование традиционного математического аппарата для их описания. Существует целый класс описаний, оперирующих качественными характеристиками объектов (много, мало, сильный, очень и т. п.) Эти характеристики обычно размыты и не могут быть однозначно интерпретированы, однако содержат важную информацию (например, «Одним из возможных признаков гриппа является высокая температура»).

Категория нечеткости и связанные с ней модели и методы очень важны с мировоззренческой точки зрения, поскольку с их появлением стало возможно подвергать количественному анализу те явления, которые раньше либо могли быть учтены только на качественном уровне, либо требовали использования весьма грубых моделей.

Значительное продвижение в этом направлении сделано во второй половине XX века профессором Калифорнийского университета (Беркли) Л. Заде. Его работы легли в основу моделирования интеллектуальной деятельности человека и явились начальным толчком к развитию новой математической теории.

Что же предложил Заде? Во-первых, он расширил классическое понятие множества, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале $(0;1)$, а не только значения 0 либо 1. Такие множества были названы нечеткими (fuzzy). Л.Заде определил также ряд операций над нечеткими множествами и предложил обобщение известных методов логического вывода *modus ponens* и *modus tollens*.

Введя затем, понятие лингвистической переменной и допустив, что в качестве ее значений (термов) выступают нечеткие множества, Л.Заде создал аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, включая нечеткость и неопределенность выражений.

Вот точка зрения Л.Заде: "Я считаю, что излишнее стремление к точности стало оказывать действие, сводящее на нет теорию управления и теорию систем, так как оно приводит к тому, что исследования в этой области сосредотачиваются на тех и только тех проблемах, которые поддаются точному решению. В результате многие классы важных проблем, в которых данные, цели и ограничения являются слишком сложными или плохо определенными для того, чтобы допустить точный математический анализ, оставались и остаются в стороне по той причине, что они не поддаются математической трактовке. Для того чтобы сказать что-либо существенное для проблем подобного рода, мы должны отказаться от наших требований точности и допустить результаты, которые являются несколько размытыми или неопределенными".

Математическая теория нечетких множеств позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечеткие выводы. Основанные на этой теории методы построения компьютерных нечетких систем существенно расширяют области применения компьютеров.

Нечеткая логика – в основном многозадачная логика, которая позволяет определять промежуточные значения между стандартными оценками подобно Да/Нет, Истина/Ложь, Черное/Белое, и т.д. Понятия подобно "довольно теплый" или "довольно холодный" могут быть сформулированы математически и обработаны компьютерами. Таким образом, сделана попытка применить человеко-подобное мышление в программировании компьютера.

В последнее время нечеткое управление является одной из самых активных и результативных областей исследований применения теории нечетких множеств (рис. 1). Нечеткое управление оказывается особенно полезным, когда технологические процессы являются слишком сложными для анализа с помощью общепринятых количественных методов, или когда доступные источники информации интерпретируются качественно, неточно или неопределенно. Реализация подхода на основе использования нечетких экспертных знаний состоит из трех основных этапов: фаззификации, композиции (нечеткого вывода) и дефаззификации.

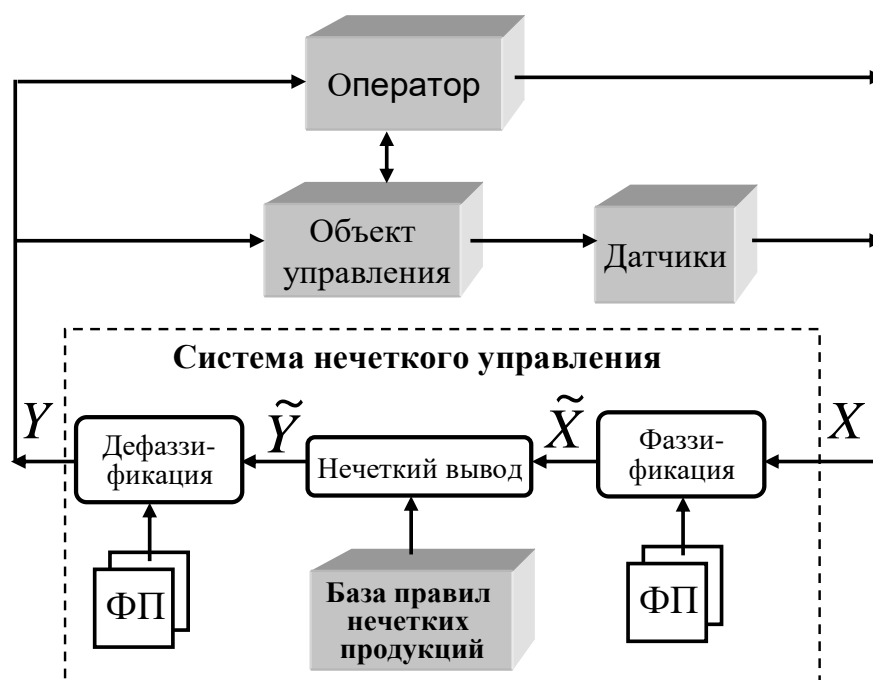


Рис. 1 – Общая схема системы нечеткого управления

На этапе фаззификации необходимо представить условия решения задачи в лингвистической форме. Этот переход представляется целесообразным, так как во многих задачах мы не имеем точного описания состояния, как факторов

внешней среды, так и регулируемых параметров машины. А основным положением является то, что экспертные знания, по сути, представлены в лингвистической форме. С помощью функций принадлежности всех термов входных лингвистических переменных на основании задаваемых четких значений из универсумов входных ЛП определяются степени уверенности в том, что входная лингвистическая переменная принимает значение – конкретный терм.

На этапе композиции все нечеткие множества, назначенные для каждого термина каждой входной переменной объединяются и формируется единственное нечеткое множество – значение для каждой выводимой лингвистической переменной. В результате использования набора правил – нечеткой базы знаний – вычисляется значение истинности для предпосылки каждого правила на основании конкретных нечетких операций, соответствующих конъюнкции или дизъюнкции термов в левой части правил.

Суть этапа дефазификации заключается в выработке на основе нечеткого логического вывода конкретных рекомендаций по установлению конкретных значений регулируемых параметров машины.

Экспериментально показано, что нечеткое управление дает лучшие результаты, по сравнению с результатами, получаемыми при общепринятых алгоритмах управления. Нечеткие методы помогают управлять домной и прокатным станом, автомобилем и поездом, распознавать речь и изображения, проектировать роботов, обладающих осязанием и зрением. Нечеткая логика, на которой основано нечеткое управление, ближе по духу к человеческому мышлению и естественным языкам, чем традиционные логические системы. Нечеткая логика обеспечивает эффективные средства отображения неопределенностей и неточностей реального мира. Наличие математических средств отражения нечеткости исходной информации позволяет построить модель, адекватную реальности.

1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Какие виды неопределенности выделяют ?

Физическая неопределенность может быть связана как с наличием во внешней среде нескольких возможностей, каждая из которых случайным образом становится действительностью (ситуация случайности, или стохастической неопределенности), так и с неточностью измерений вполне определенной величины, выполняемых физическими приборами (ситуация неточности). В рамках данной классификации отнесение случайности и неточности к неоднозначности предполагает знание соответствующих законов распределения вероятностей.

Лингвистическая неопределенность связана с использованием естественного языка (в частном случае — профессионального языка ЛПР) для описания задачи принятия решений. Эта неопределенность обуславливается необходимостью оперировать конечным числом слов и ограниченным числом структур фраз (предложений, абзацев, текстов) для описания за конечное время бесконечного множества разнообразных ситуаций, возникающих в процессе принятия решений. Лингвистическая неопределенность порождается, с одной стороны, множественностью значений слов (понятий и отношений) языка, которую условно назовем полисемией, а с другой стороны, неоднозначностью смысла фраз.

Для наших целей достаточно выделить два вида полисемии: омонимию и нечеткость. Если отображаемые одним и тем же словом объекты задачи принятия решений существенно различны, то соответствующую ситуацию отнесем к омонимии. Например: коса — вид побережья, сельскохозяйственный инструмент, вид прически. Если же эти объекты сходны, то ситуацию отнесем к нечеткости. Например, небольшой запас горючего на складе: 1 т горючего, 1,1 т горючего и т. д.; множество гор — гора Гайзинькалнс в Латвии — 311 м над уровнем моря, гора Эверест — свыше 8000 м над уровнем моря; множество чисел, значительно меньших тысячи.

Рассматривая источники неоднозначности смысла фраз, можно выделить синтаксическую, семантическую и прагматическую неоднозначность. В первом случае уточнение синтаксиса позволяет понять смысл фразы. Примеры: «железные болты и гайки» — (железные болты) и гайки; «казнить нельзя помиловать» — казнить нельзя, помиловать; «он встретил ее на поляне с цветами» —

он встретил ее на (поляне с цветами). Во втором случае при поверхностной семантической неопределенности смысла фраз отдельные слова понятны, но неясен смысл всей фразы. Примеры: «голубые зеленые мысли яростно спят»; отрывок текста из монографии по родственной специальности. При глубинной семантической неопределенности непонятны и все отдельные слова. Классический пример — «глокая куздра штеко будланула бокра и курдячит бокренка». Наконец, прагматическая неопределенность связана с неоднозначностью использования синтаксически и семантически понятной информации для достижения целей деятельности.

Заканчивая рассмотрение видов неопределенности описания задач принятия решений, отметим следующее. Во-первых, учет физической неопределенности может усложниться появлением лингвистической неопределенности в описании вероятностного распределения. Другими словами, данные виды неопределенности могут накладываться один на другой. Во-вторых, проведенный анализ не касается того, какие элементы задачи принятия решений имеют неопределенное описание. В частности, неопределенность описания целей, отражающаяся в многокритериальности выбора альтернатив, может иметь и нечеткий, и случайный характер. В игровых постановках задач, когда остальные ЛПР могут быть отнесены к среде, влияющей на результаты деятельности выбранного ЛПР специфическим образом, неопределенность описания среды для конкретного ЛПР также может проявляться в виде и физической, и лингвистической неопределенности.

Ниже приведена классификация видов неопределенности.

1. Неопределенность, случайность:

1.1 события и (или) состояние среды, обусловленные случайностью;

1.2 явления, неподдающиеся анализу и измерению со сколь угодно большой точностью.

2. Нечеткость:

2.1 нечеткость как следствие субъективности или индивидуальности человека;

2.2 нечеткость или неясность в процессах мышления и умозаключения:

2.2.1 – нечеткое или неточное заключение;

2.2.2 – неясность вследствие сложности и (или) многообразия выводов.

3. Нечеткость или неясность, сопутствующая естественным языкам:

3.1 нечеткость описания или представления;

3.2 неясность, связанная со сложностью и (или) многообразием семантик и структур естественных языков.

4. Расплывчатость или смутность рисунков, картин или сцен:

4.1 расплывчатость рисунков и картин;

4.2 неясность, возникающая в процессе интерпретации рисунков или картин.

5. Неясность вследствие структурной сложности и (или) многообразия информации [1, 15].

В каких условиях применение нечеткой логики эффективно ?

Применение нечеткого управления эффективно ...

- для очень сложных процессов, когда имеется сложная математическая модель;
- для нелинейных процессов;
- если должна выполняться обработка экспертных знаний.

Применение нечеткого управления не имеет смысла, если ...

- стандартная теория управления дает удовлетворяющий результат;
- легко разрешимая и адекватная математическая модель уже существует;
- проблема не разрешима.

Что такое нечеткие множества?

В классической математике мы хорошо знакомы с понятием четкие множества. В обычной теории множеств существуют несколько способов задания множества. Одним из них является задание с помощью характеристической функции, определяемой так. Пусть U – универсальное множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в настоящей задаче, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций, заданных на действительной оси, и т.д. В дальнейшем в качестве универсального множества будет, как правило, использовано множество всех действи-

тельных чисел. Характеристическая функция множества – это функция, значения которой указывают, является ли X элементом множества A . Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений, т.е. 1 или 0.

Рассмотрим, например множество X всех вещественных чисел между 0 и 10, которые будем называть предметной областью. Определим подмножество A из X всех вещественных чисел в диапазоне между 5 и 8:

$$A = [5, 8].$$

Покажем множество A в виде характеристической функции, то есть эта функция присваивает значение 1 или 0 каждому элементу в X , в зависимости от того, находится ли элемент в подмножестве или нет (рисунок 2).

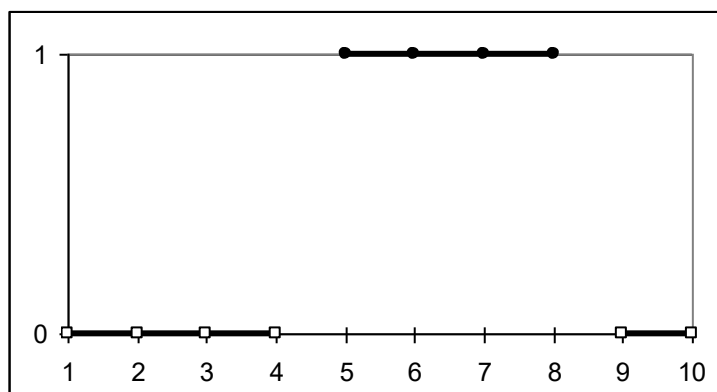


Рисунок 2 – Пример характеристической функции четкого множества

Другими словами, если характеристическая функция элементов, равна 1, то эти элементы, принадлежат множеству A , а элементы, у которых характеристическая функция равна 0 - не принадлежат множеству A .

Это понятие применимо для многих областей приложений. Но можно легко найти ситуации, где этот метод испытывает недостаток в гибкости.

Рассмотрим нечеткое понятие «возраст человека». Определим «возраст» как лингвистическую переменную (ЛП). Базовый набор значений ЛП «возраст» определим как (рис. 3):

$B = \{\text{младенческий, детский, юный, молодой,}$
 $\text{зрелый, преклонный, старый}\}$

Для ЛП «возраст» базовая шкала – это числовая шкала от 0 до 120 лет, обозначающая количество прожитых лет, а функция принадлежности опреде-

ляет, насколько мы уверены в том, что данное количество лет можно отнести к данной категории возраста.

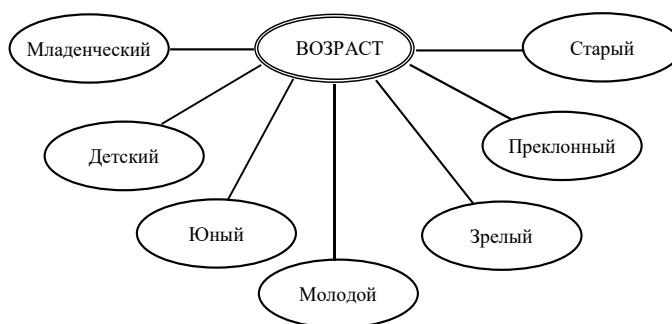


Рис. 3 – Базовый набор значений ЛП «возраст»

Например, рассмотрим множество «молодой». Формально обозначим:

$$B = \{\text{множество молодежи}\}.$$

Так как возраст начинается с 0 лет, то отрицательный диапазон этого набора должен быть пуст. Верхнюю границу диапазона определить довольно трудно. Для начала установим верхнюю границу диапазона, например, 20 лет. Следовательно, мы получаем В как четкий интервал:

$$B = [0, 20] .$$

Теперь возникает вопрос: почему кто-то на его 20-ом дне рождения молодой, а на следующий день не молодой? Очевидно, это – структурная проблема, поскольку, если мы возьмем другой интервал от 20 до любой произвольной отметки, мы можем задать тот же самый вопрос.

Более естественный способ задавать набор В состоит в том, чтобы ослабить строгое разделение между понятиями молодой и не молодой. Мы можем делать это, позволяя не только (четкое) решение "ДА, он/она находится в наборе молодежи, или НЕТ, он/она не находится в наборе молодежи", но и применяя более гибкие фразы, например, "он/она принадлежит немного больше к набору молодежи или НЕТ, он/она почти не принадлежит к набору молодежи".

Рассмотрим формальное описание данной идеи. Прямой способ обобщить это понятие состоит в том, чтобы учитывать больше значений между 0 и 1. Фактически возможны многие варианты между 0 и 1, а именно числовой интервал $I = [0, 1]$.

Интерпретация чисел, назначенных теперь ко всем элементам предметной области более трудна. Конечно, снова 1, присвоенная элементу означает, что элемент находится во множестве В, а 0 – что элемент не определен во множестве В. Все другие значения означают частичную принадлежность к множеству В.

На рис. 1.4 изображена характеристическая функция рассматриваемого множества «молодой», из которого видно, что в 25 лет вы все еще молоды, но не на все 100%, а всего на 50%.

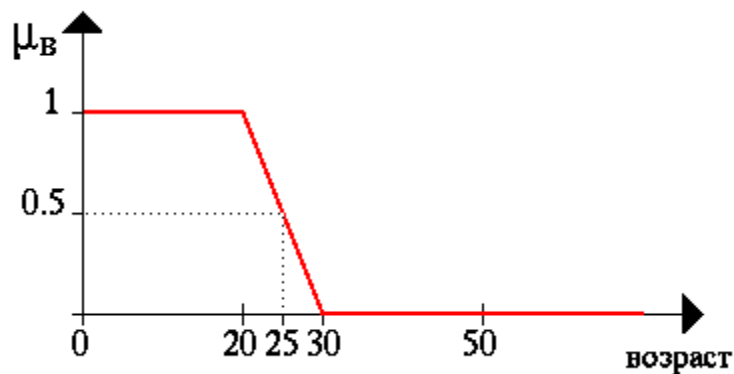


Рис. 4 – Характеристическая функция множества молодежи

Что такое нечеткое множество?

Рассмотрим универсальное множество $U = \{u\}$. Нечетким множеством А на множестве U называется совокупность пар:

$$A = \{ \langle \mu_A(u), u \rangle \}, \quad (1)$$

где $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$ — отображение множества U в единичный отрезок $[0, 1]$, называемое функцией принадлежности нечеткого множества А. Значение функции принадлежности $\mu_A(u)$ для элемента $u \in U$ будем называть степенью принадлежности.

Переменная u называется базовой. Точки 0 и 1 представляют собой соответственно низшую и высшую степень принадлежности элемента к определенному подмножеству.

Интерпретацией степени принадлежности $\mu_A(u)$ является субъективная мера того, насколько элемент $u \in U$ соответствует понятию, смысл которого формализуется нечетким множеством А. Другими словами величина $\mu_A(u)$ обозна-

чает субъективную оценку степени принадлежности u к множеству A , например $\mu_A(u) = 0,8$ означает, что u на 80% принадлежит A . Следовательно, могут существовать "моя функция принадлежности", "твоя функция принадлежности", "функция принадлежности эксперта".

Функция принадлежности, во-первых, имеет субъективный характер и, во-вторых, может интерпретироваться на основе понятия вероятности. В рамках вероятностной трактовки значение $\mu_A(u)$ функции принадлежности нечеткого множества A для любого элемента $u \in U$ понимается как вероятность того, что ЛПР отнесет элемент u к множеству A . Данная интерпретация позволяет установить, с каким объектом «работают» теория нечетких множеств и базирующийся на ней лингвистический подход к обработке неопределенной информации.

Рассмотрим основные свойства нечетких множеств.

1. **Точкой перехода** нечеткого множества A называется элемент u множества U , для которого $\mu_A(u) = 0.5$. На рисунке 5 точками перехода являются $u_1 = 14$ и $u_2 = 18$.

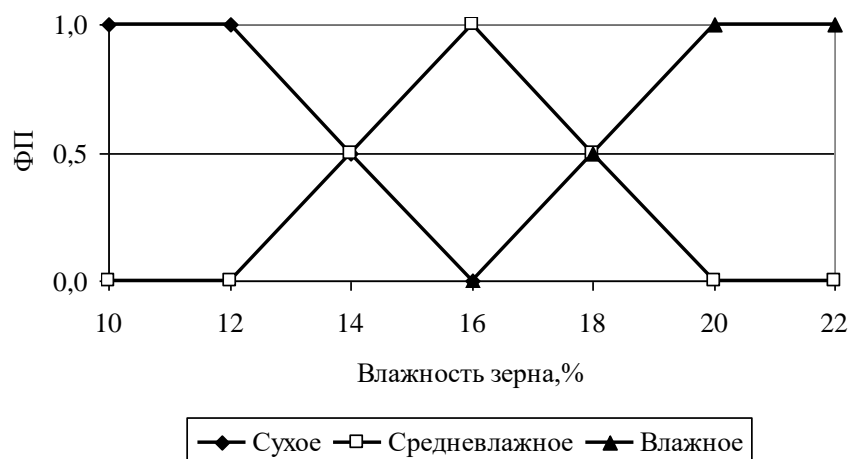


Рисунок 5 – Иллюстрация понятия «точка перехода»

2. **Носителем** нечеткого множества A называется множество

$$S_A = \{u \in U : \mu_A(u) > 0\}. \quad (2)$$

Иными словами, носителем нечеткого множества A является подмножество S_A универсального множества X , для элементов которого функция принадлежности μ_A строго больше нуля.

В качестве примера рассмотрим нечеткое множество A_3 , соответствующее нечеткому понятию «небольшой запас деталей на складе». Носителем данного нечеткого множества является конечное множество $S\{10, 11, \dots, 40\}$, каждый элемент которого представляет собой определенное количество деталей.

$$A_3 = \{0,05/10; 0,1/11; 0,2/12; 0,3/13; 0,4/14; 0,5/15; 0,7/16; 0,8/19; 1,0/20; 1,0/21; \dots; 1,0/33; 0,9/34; 0,8/35; 0,6/36; 0,4/37; 0,3/38; 0,2/39; 0,1/40\}.$$

Отсюда следует, что в решаемой задаче управления запасами для конкретного лица, принимающего решение (ЛПР) понятию «небольшой запас деталей на складе» полностью соответствует запас объемом от 20 до 33 деталей, в меньшей степени – запасы от 11 до 19 и от 34 до 40 деталей. Запас объемом меньше 10 и больше 40 деталей понятием «небольшой» охарактеризован быть не может.

Для практических приложений носители нечетких множеств всегда ограничены. Так, носителем нечеткого множества допустимых режимов для системы может служить четкое подмножество (интервал), для которого степень допустимости не равна нулю (рис. 6).

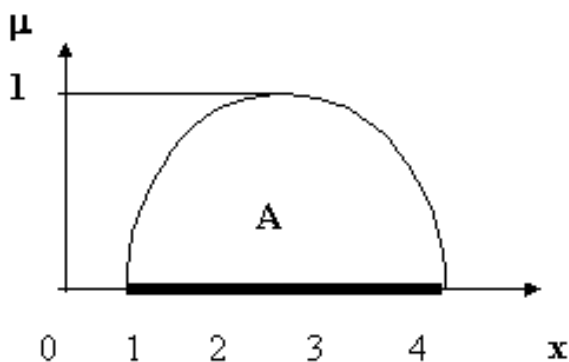


Рис.6 – Понятие носителя нечеткого множества (выделен жирной чертой)

3. **Высотой** d нечеткого множества A называется максимальное значение функции принадлежности этого множества $d = \max_{u \in U} \mu_A(u)$.

В литературе также встречается другая форма записи: $d(A) = \sup_{x \in X} \mu(x)$.

Если $d = 1$, то нечеткое множество называется нормальным.

Ниже будут рассматриваться только нормальные (нормализованные) нечеткие множества. При $d = \max_{u \in U} \mu_A(u) < 1$ нечеткое множество называется субнормальным (субнормализованным).

Субнормальное множество всегда можно превратить в нормальное, разделив все значения функции принадлежности на ее максимальное значение, т.е.

$$\mu^{nor}_A(u) = \frac{\mu_A(u)}{\max \mu_A(u)}$$

На рисунке 7 дана иллюстрация процедуры преобразования в нечеткое множество нормального типа. Пунктиром представлено субнормальное нечеткое множество вида

$$A = \{0/1; \quad 0/2; \quad 0,2/3; \quad 0,4/4; \quad 0,6/5; \quad 0,4/6; \quad 0,2/7; \quad 0/8; \quad 0/9\} \text{ (Ряд 1)}.$$

В соответствии с рассмотренным выше правилом разделим каждое значение исходной функции принадлежности на ее максимальное значение ($\max = 0,6$).

$$A^n = \{0/1; 0/2; \quad 0,33/3; \quad 0,67/4; \quad 1/5; \quad 0,67/6; \quad 0,33/7; \quad 0/8; \quad 0/9\} \text{ (Ряд 2)}.$$

В результате получено нечеткое множество нормального типа (сплошная линия, рис. 7).

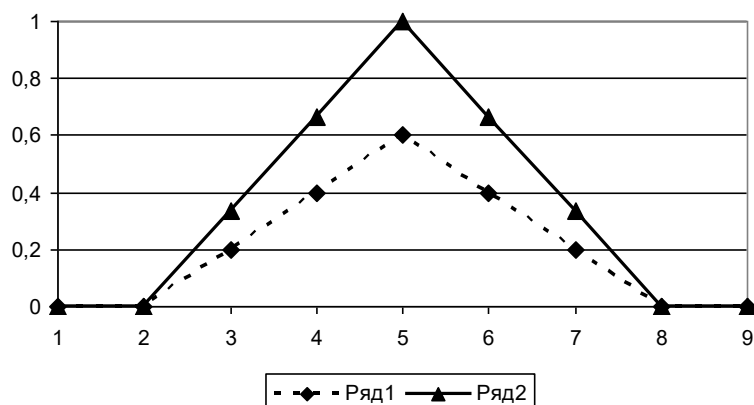


Рисунок 7 – Преобразование нечеткого множества в нормальное

4. **Ядром** нечеткого множества называется четкое подмножество универсального множества, элементы которого имеют степени принадлежности равные единице (рис. 86).

5. **α -сечением** (или множеством α -уровня) нечеткого множества называется четкое подмножество множества, элементы которого имеют степени принадлежности большие или равные $E\alpha$. Значение α называют α -уровнем (рис. 8). Носитель (ядро) можно рассматривать как сечение нечеткого множества на нулевом (единичном) α -уровне.

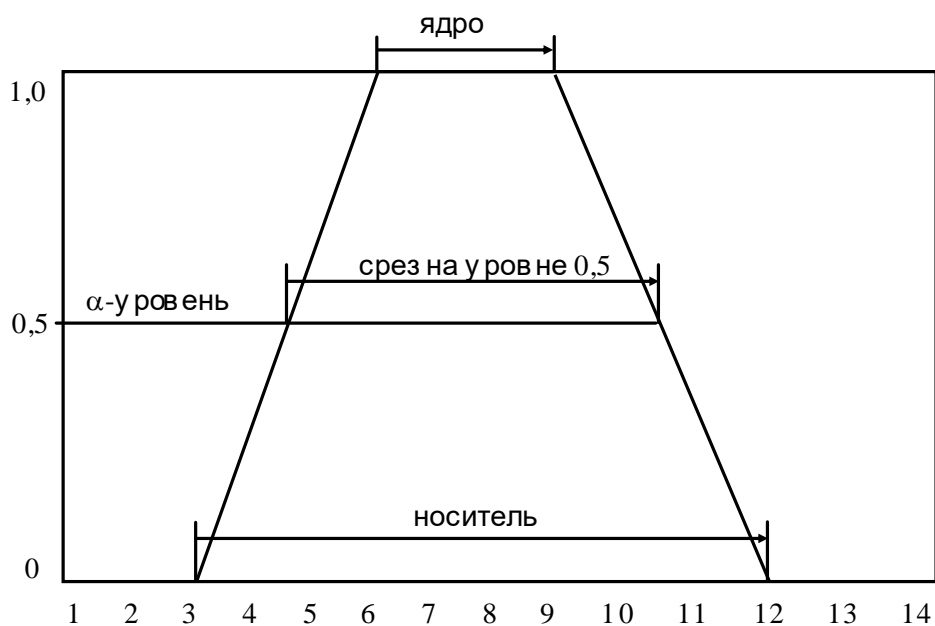


Рис. 8 – Носитель, ядро и α -уровень

6. **Одноточечное** множество – носитель множества A состоит из одной точки:

$$A = \mu / x.$$

7. **Дискретное** нечеткое множество – носитель A состоит из конечного числа элементов:

$$A = \{0,1/1; 0,2/2; 0,3/3; 0,4/4; 0,6/5; 0,7/6; 0,8/7; 0,9/8; 1,0/9\}.$$

8. Носитель нечеткого множества состоит из бесконечного числа точек. Тогда функция принадлежности $\mu(x)$ выражается аналитически.

9. Нечеткое число A с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ называется **уни-модальным**, если существует единственная точка $x \in R$, для которой выполняется равенство $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ (рис. 9).

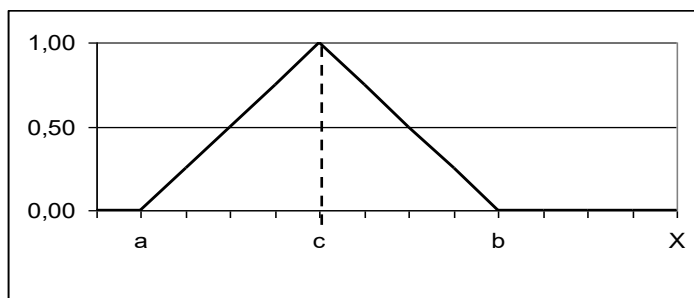


Рис. 9 – Пример унимодальной функции

Нечеткое число A с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(u)$ называется **много-модальным**, если точка $x \in R : \mu_{\tilde{A}}(u) = 1$ не является единственной, и **толерант-ным**, если существует интервал, для всех точек которого выполняется равенство $\mu_{\tilde{A}}(u) = 1$.

Этот интервал называется **интервалом толерантности** нечеткого числа A (рис. 10).

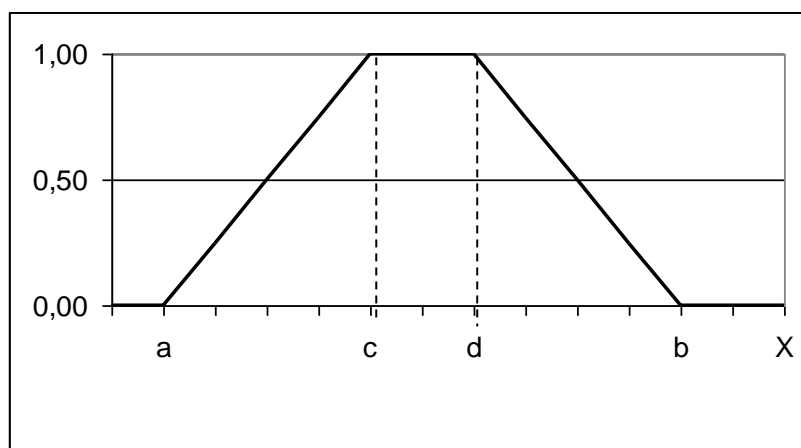


Рис. 10 – Пример функции с интервалом толерантности (с – d).

Что называется нечетким отношением?

Пусть $V = \{v\}$ – другое универсальное множество. Нечетким отношением R на множестве $U \times V$ называется совокупность пар

$$R = \bigcup_{(u,v) \in U \times V} \mu_R(u,v)/(u,v), \quad (3)$$

где $\mu_R : U \times V \rightarrow [0,1]$ – функция принадлежности нечеткого отношения R, имеющая тот же смысл, что и функция принадлежности нечеткого множества. Приведенное определение легко обобщается на n-мерный случай.

Сравнивая выражения (1.1) и (1.4), можно видеть, что нечеткое отношение – это нечеткое множество с векторной базовой переменной. Примерами нечетких отношений могут служить такие, как «X примерно равен Y», «X значительно больше Y», «A существенно предпочтительнее, чем B».

Нечеткая и лингвистическая переменные

Нечеткая переменная определяется кортежем $\langle X, U, \tilde{X} \rangle$, где X — наименование нечеткой переменной; $U = \{u\}$ – область ее определения, или универсальное множество (универсум);

$\tilde{X} = \bigcup_{u \in U} \mu_u / u$ — нечеткое множество на U, описывающее ограничение на

возможные числовые значения нечеткой переменной X.

Лингвистическая переменная

определяется кортежем:

$$\langle \beta; T; U; G; M \rangle, \quad (4)$$

где β – наименование лингвистической переменной; T – множество ее значений, или термов, представляющих собой наименования нечетких переменных, областью определения каждой из которых является множество U.

Множество T называется базовым терм-множеством лингвистической переменной;

G – синтаксическая процедура, описывающая процесс образования из множества T новых, осмысленных для конкретной задачи принятия решений значений лингвистической переменной. Множество $T^* = T \bigcup G(T)$ называется расширенным терм-множеством лингвистической переменной;

M – семантическая процедура, позволяющая приписать каждому новому значению, образуемому процедурой G, некоторую семантику путем формирования соответствующего нечеткого множества, т. е. отобразить новое значение в нечеткую переменную.

Рассмотрим пример лингвистической переменной. Пусть ЛПР оценивает посадочную скорость летательных аппаратов с помощью понятий «малая», «небольшая», «средняя», «высокая». При этом максимальная посадочная скорость равна 300 км/ч. Формализация такого описания может быть проведена с помощью лингвистической переменной

$$\langle \text{СКОРОСТЬ}, \{\text{МАЛАЯ}, \text{НЕБОЛЬШАЯ}, \text{СРЕДНЯЯ}, \text{ВЫСОКАЯ}\}, \\ [0, 300], G, M \rangle,$$

где G – процедура перебора элементов базового терм-множества, M – процедура экспертного опроса.

В общем случае взаимосвязь лингвистической и нечеткой переменных графически может быть представлена, как показано на рис. 11.

Здесь $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$, $u_0 < u_2 < u_1 < u_4 < u_3 < u_6 < u_5 < u_7$, $U = [u_0, u_7]$. Пара точек (u_0, u_1) называется граничной парой.

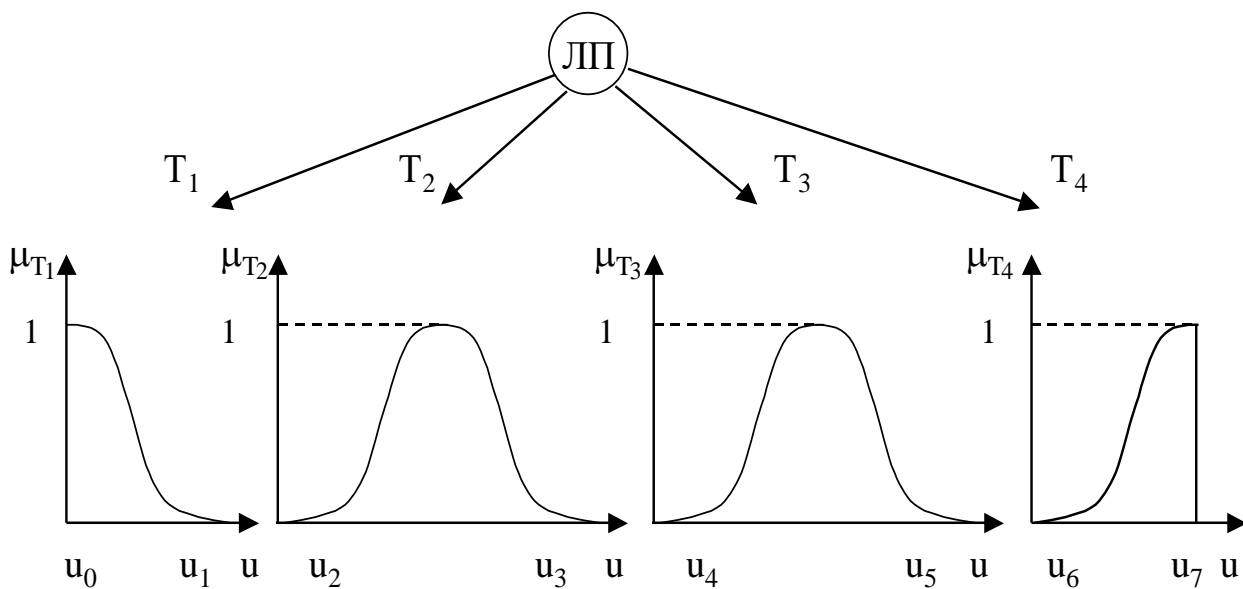


Рис. 11 – Взаимосвязь лингвистической и нечеткой переменных

Нечеткие числа и функции

В зависимости от характера множества U лингвистические переменные могут быть разделены на числовые и нечисловые. Числовой называется лингвистическая переменная, у которой $U \subset R^1$, где $R^1 = (-\infty, \infty)$, и которая имеет измеримую базовую переменную.

Нечеткие переменные, соответствующие значениям числовой лингвистической переменной, будем называть нечеткими числами. Если $|U| < \infty$, то нечеткие числа будем считать дискретными, если же $|U| = |R|$ – то непрерывными. Приведенная выше лингвистическая переменная СКОРОСТЬ является числовой, а нечеткие переменные из ее терм-множества – непрерывными нечеткими числами.

Примером нечисловой лингвистической переменной может служить переменная СЛОЖНОСТЬ, формализующая понятие «сложность разработки», со значениями НИЗКАЯ, СРЕДНЯЯ, УМЕРЕННАЯ, ВЫСОКАЯ.

К функциям принадлежности нечетких чисел обычно предъявляется ряд требований [14, 15].

Пусть $U = \{u\}$, $V = \{v\}$ — два универсальных множества; $F(U)$ — система всех нечетких множеств, заданных на U . Используя данные обозначения, определяем три типа функций:

четкая функция нечеткого аргумента

$$H_1 : F(U) \rightarrow V,$$

нечеткая функция четкого аргумента

$$H_2 : U \rightarrow F(V),$$

нечеткая функция нечеткого аргумента

$$H_3 : F(U) \rightarrow F(V),$$

Формализация нечеткой информации на основе прямого опроса единственного эксперта

Информация, обрабатывая и анализируя которую человек принимает те или иные управленческие решения, может иметь как качественный, так и количественный характер. Название «количественный признак» говорит о том, что изучаемый признак может быть измерен количественно. К таким признакам относятся прибыль и убытки предприятия, возраст человека, вес и т.д. Название «качественный признак» говорит о том, что изучаемый признак не может быть

измерен количественно. К таким признакам относятся характер человека, внешность, знания, успешность выполнения профессиональных задач и т.д.

Таким образом, признаки чаще всего описываются на разных «языках»: значения физических величин измеряются обычными числовыми значениями, а значения качественных признаков описываются качественными понятиями или лингвистическими значениями этих признаков.

Формализация в рамках методов построения полных ортогональных семантических пространств ПОСП) информации, полученной в результате оценивания экспертом проявлений разных качественных признаков, обеспечивает оперирование не со значениями самих признаков, измеренных в разных шкалах, а с функциями принадлежности понятий, применяемых для оценивания этих признаков у реальных объектов.

Важно понимать, что ПОСП, построенные в результате опроса экспертов, всегда будут обладать некоторым свойством уникальности в том смысле, что они отражают суждения, мнения экспертов, использующих зачастую информацию, известную достаточно узкому кругу лиц.

Действительно, если строить ПОСП «рост» = {низкий, средний, высокий, очень высокий} с позиций московских и токийских экспертов, то, очевидно, мы получим два пространства с разным набором функций принадлежности.

Если строить ПОСП «прибыль» = {очень низкая, низкая, средняя, высокая, очень высокая}, то денежный эквивалент, считающийся высокой прибылью для одной фирмы, для другой будет очень низкой прибылью. Это как раз тот случай, когда при определении подобных категорий эксперты используют информацию известную достаточно узкому кругу с одной стороны и уникальную по отношению именно к этой фирме с другой стороны.

Нечеткие высказывания и правила их преобразования

Нечеткими высказываниями называются высказывания видов:

1) высказывание $\langle \beta \text{ есть } \alpha \rangle$, где β – наименование лингвистической переменной, отражающей некоторый объект или параметр реальной действительности.

сти, относительно которой производится утверждение α , являющееся ее нечеткой оценкой (нечеткой переменной). Например, <давление большое>. В высказывании <толщина равна 14 мм> значение $\alpha = 14$ мм является четкой оценкой лингвистической переменной β : <толщина>;

2) высказывания вида $\langle \beta \text{ есть } m\alpha \rangle$, $\langle \beta \text{ есть } Q\alpha \rangle$, $\langle Q\beta \text{ есть } m\alpha \rangle$, $\langle m\beta \text{ есть } Q\alpha \rangle$, при этом m называется модификатором (ему соответствуют такие слова, как ОЧЕНЬ, БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ, НЕЗНАЧИТЕЛЬНЫЙ, СРЕДНИЙ и др.), Q - квантификатором (ему соответствуют слова типа БОЛЬШИНСТВО, НЕСКОЛЬКО, МНОГО, НЕМНОГО, ОЧЕНЬ МНОГО и др.). Например, <давление очень большое>, <большинство значений параметра очень мало>;

3) высказывания, образованные из высказываний 1-го и 2-го видов и союзов И; ИЛИ; ЕСЛИ. . . , ТО. . . ; ЕСЛИ. . . , ТО . . . ИНАЧЕ. Например, <ЕСЛИ давление большое, ТО толщина не мала>.

Необходимо отметить, что отождествление данных союзов с логическими операциями конъюнкций, дизъюнкций, отрицанием и импликацией возможно только при предварительном рассмотрении вопроса коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности высказываний, образующих предложения.

Предположим, имеются некоторые высказывания \tilde{C} и \tilde{D} относительно ситуации A . Пусть рассматриваемые высказывания имеют вид \tilde{C} : $\langle \beta \text{ есть } \alpha_C \rangle$ и \tilde{D} : $\langle \beta \text{ есть } \alpha_D \rangle$, где α_C и α_D - нечеткие переменные, определенные на универсальном множестве $U = \{u\}$.

Истинность высказывания \tilde{C} и \tilde{D} относительно \tilde{C} есть значение функции $T(\tilde{D}/\tilde{C})$, определяемое степенью соответствия высказываний \tilde{C} и \tilde{D} . В формальной записи

$$T(\tilde{D}/\tilde{C}) = \{ \mu_T(\tau) / \tau \},$$

где $(\forall u \in U) (\tau = \mu_D(u))$; $\mu_T(\tau) = \max \mu_C(u)$, $U' = \{u \in U \mid \mu_D(u) = \tau\}$, $u \in U'$ при этом μ_D и μ_C - функции принадлежности нечётких переменных α_C α_D ; $\mu_T(\tau)$ - функция принадлежности значения истинности; $\tau \in [0,1]$ - область её определения.

Иными словами, истинностью нечеткого высказывания \tilde{D} относительно нечеткого высказывания C является нечеткое множество $T(\tilde{D}/C)$, определенное на интервале $[0, 1]$, такое, что для любого $\tau \in [0, 1]$ значение ее функции принадлежности равно наибольшему значению $\mu_{\tilde{C}}(u)$ по всем u , при которых $\mu_{\tilde{D}}(u) = \tau$.

Пример. Предположим, что сформулировано высказывание D : $\langle \beta \text{ находится близко к } 5 \rangle$, в то время как C : $\langle \beta \text{ имеет значение приблизительно } 6 \rangle$. Пусть $\alpha_{\tilde{D}}$ есть "близко к 5", $\alpha_{\tilde{C}}$ есть "приблизительно 6" суть нечеткие переменные с нечеткими множествами:

$$\begin{aligned} C_{\tilde{C}} = \{ & \langle 0, 1/2 \rangle, \langle 0, 3/3 \rangle, \langle 0, 7/4 \rangle, \langle 1/5 \rangle, \\ & \langle 0, 8/6 \rangle, \langle 0, 6/7 \rangle, \langle 0, 3/8 \rangle, \langle 0, 1/9 \rangle, \\ & \langle 0, 8/6 \rangle, \langle 0, 6/7 \rangle, \langle 0, 3/8 \rangle, \langle 0, 1/9 \rangle \}; \\ C_{\tilde{D}} = \{ & \langle 0, 1/3 \rangle, \langle 0, 4/4 \rangle, \langle 0, 8/5 \rangle, \langle 1/6 \rangle, \\ & \langle 0, 7/7 \rangle, \langle 0, 4/8 \rangle, \langle 0, 3/9 \rangle, \langle 0, 1/10 \rangle \}. \end{aligned}$$

В этом случае $U = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$. Тогда истинность высказывания D относительно C будет иметь следующий вид:

$$T(\tilde{D}/\tilde{C}) = \{ \langle 0, 1/0 \rangle, \langle 0, 3/0, 1 \rangle, \langle 0, 4/0, 3 \rangle, \langle 0, 7/0, 6 \rangle, \langle 0, 4/0, 7 \rangle, \langle 1/0, 8 \rangle, \langle 0, 8/1 \rangle \}.$$

Требования, предъявляемые к процедуре построения функций принадлежности

В общем случае базовое терм-множество лингвистической переменной имеет вид

$$T_i = \{ T_1^i, T_2^i, \dots, T_m^i \}, (i \in K = \{ 1, 2, \dots, l \}).$$

Базовое терм-множество образуется на основе экспертных суждений. Расширенное терм-множество может быть получено реализацией G-процедуры с применением модификатора m (m соответствуют такие слова, как ОЧЕНЬ, БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ, НЕЗНАЧИТЕЛЬНЫЙ, СРЕДНИЙ и др.) и квантификатора Q (Q соответствуют слова типа БОЛЬШИНСТВО, НЕСКОЛЬКО, МНОГО, НЕМНОГО, ОЧЕНЬ МНОГО и др.). Например, для лингвистической переменной «Влажность стеблестоя» базовое терм-множество есть:

$$T_X = \{\alpha_{X1}; \alpha_{X2}; \alpha_{X3}\} = \{\text{сухой; нормальный; влажный}\},$$

а расширенное терм-множество есть: $T_X = \{\alpha_{X1}; \alpha_{X2}; \alpha_{X3}; \alpha_{X4}; \alpha_{X5}\} = \{\text{сухой; нормальный; влажный; повышенной влажности; очень влажный}\}.$

Термы лингвистических переменных определены на действительной оси R (в соответствии с физическим смыслом переменной). В единичном случае примем, что $X \subseteq R_1$, а также обозначим $\inf X$ через x' , $\sup X$ через x'' – соответственно нижняя и верхняя грани множества. При построении функций принадлежности необходимо рассматривать упорядоченное множество термов T . Данная процедура означает, что терм, который имеет носитель, расположенный левее на действительной оси, получает меньший номер.

Для упорядочения множества T используем выражение

$$(\forall T_i \in T)(\forall T_j \in T)(i > j \leftrightarrow (\exists x \in C_i)(\forall y \in C_j)(x > y)).$$

Терм-множества рассматриваемых ЛП переменных должны удовлетворять условиям:

$$\mu_{C_1}(x') = 1, \quad \mu_{C_m}(x'') = 1; \quad (5)$$

$$(\forall T_i \in T \setminus \{T_m\})(0 < \sup_{x \in X} \mu_{C_i \cap C_{i+1}}(x) < 1); \quad (6)$$

$$(\forall T_i \in T)(\exists x \in X)(\mu_{C_i}(x) = 1); \quad (7)$$

$$(\forall \beta)(\exists x' \in R_1)(\exists x'' \in R_1)((\forall x \in X)(x' < x < x'')). \quad (8)$$

Интерпретация выражений (5 – 9) заключается в следующем.

Условие (5) подчеркивает, что функции принадлежности крайних термов ЛП не могут иметь колоколообразную форму, что обусловлено расположением этих термов в упорядоченном множестве T .

Условие (6) оговаривает недопустимость в базовом множестве T термов, представленных на рис. 12. Случай недопустимой близости функций принадлежности (рис. 12 а) характеризует естественную разграниченность понятий, аппроксимируемых термами (по сути понятия не различимы – тогда нет необходимости их вводить и рассматривать). Во втором случае (рис. 12 б) имеется центральный участок области определения термов, которому не соответствует какое-либо понятие.

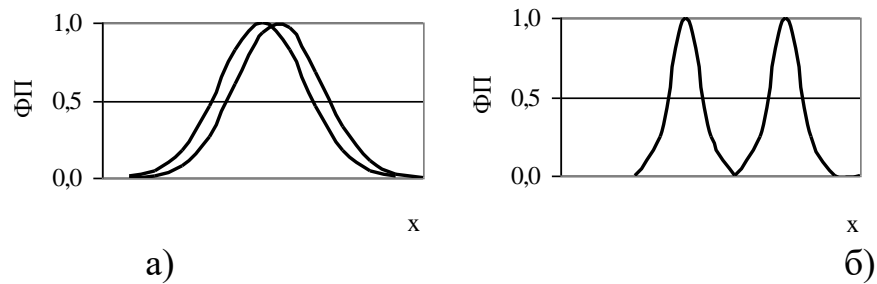


Рис. 12 – Варианты некорректного определения границ термов ЛП

Условие (7) указывает на то, что каждое понятие имеет хотя бы один типичный объект, обозначаемый этим понятием. Поэтому недопустимо совмещения на одном отрезке шкалы функций принадлежности с различной высотой $d = \max_{x \in X} \mu(x)$. Предполагается использование нормальных нечетких множеств с высотой $d = 1$.

Условие (8) оговаривает ограниченность области определения X конечным множеством точек. Данное условие, например, для регулируемых параметров рабочих органов, является естественным, так как эти ограничения обусловлены конструкцией машины.

Один из возможных подходов при построении функции принадлежности термов ЛП связан с использованием (L-R) представления нечеткой переменной. Рассмотрим толерантные и унимодальные (L-R) – числа с функциями принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_1 - x}{a_L}\right), 0 \leq \frac{a_1 - x}{a_L} \leq 1, a_L > 0 \\ R\left(\frac{x - a_2}{a_R}\right), 0 \leq \frac{x - a_2}{a_R} \leq 1, a_R > 0 \\ 1, \frac{a_1 - x}{a_L} < 0 \cap \frac{x - a_2}{a_R} < 0 \\ 0, \frac{a_1 - x}{a_L} > 1 \cup \frac{x - a_2}{a_R} > 1 \end{cases},$$

и следующими условиями на функции L и R :

- 1) $L(0) = R(0) = 1$, $L(1) = R(1) = 0$,
- 2) $L(x)$ и $R(x)$ – монотонно убывающие функции на множестве $[0, 1]$.

\tilde{A} символически записывается в виде $\tilde{A} \equiv (a_1, a_2, a_L, a_R)$ (или $\mu_{\tilde{A}}(x) \equiv (a_1, a_2, a_L, a_R)$), где a_1, a_2, a_L, a_R - параметры толерантного (L-R)-числа \tilde{A} . Отрезок $[a_1, a_2]$ - интервал толерантности, а a_L и a_R - соответственной левым и правым коэффициентами нечеткости. Функция $L\left(\frac{a_1 - x}{a_L}\right)$ есть левая граница функции принадлежности толерантного (L-R)-числа, а функция $R\left(\frac{x - a_2}{a_R}\right)$ есть права граница функции принадлежности толерантного (L-R)-числа. При $a_L = 0$ предполагается, что $L\left(\frac{a_1 - x}{a_L}\right) = 0$, при $a_R = 0$ предполагается, что $R\left(\frac{x - a_2}{a_R}\right) = 0$. Унимодальное (L-R) - число \tilde{A} имеет функцию принадлежности толерантного (L-R) - числа при условии $a_1 = a_2$. Символически унимодальное (L-R) - число \tilde{A} записывается в виде $\tilde{A} \equiv (a_1, a_L, a_R)$.

3 ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Подобно операциям над четкими множествами, нечеткие множества также можно пересекать, объединять и инвертировать. Заде Л. предложил оператор минимума для пересечения и оператор максимума для объединения двух нечетких множеств. Видно, что эти операторы совпадают с объединением и пересечением, если мы рассматриваем только степени принадлежности 0 и 1.

Операция объединения

Объединением нечетких множеств A и B называется множество:

$$A \cup B = \{ \langle \mu_{A \cup B}(x) / x \rangle \}, \quad (9)$$

где $(\forall x \in X) \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

Объединение соответствует логической операции ИЛИ.

Предположим, на интервале от $[0; 0,4]$ функция принадлежности (ФП) описывается выражением (10):

$$\mu(x, a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & \text{если } a < x < b \\ 0, & \text{если } x \geq b \end{cases} \quad (10)$$

Предположим, на интервале $[0,2; 0,8]$ функция принадлежности описывается выражением (11):

$$\mu(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a \\ \frac{x-a}{c-a}, & \text{если } a < x < c \\ 1, & \text{если } c \leq x \leq d \\ \frac{b-x}{b-d}, & \text{если } d < x < b \\ 0, & \text{если } x \geq b \end{cases} \quad (11)$$

В результате выполнения операции объединения общий вид ФП будет такой (рисунок 13).

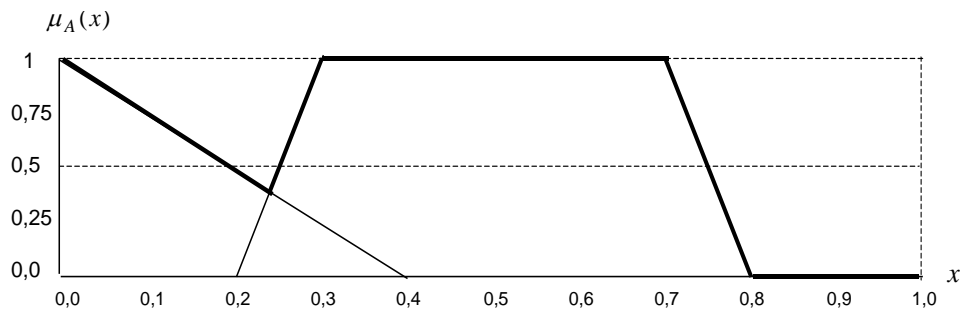


Рисунок 13 – Результат выполнения операции объединения

Операция пересечения

Пересечением нечетких множеств A и B называется множество:

$$A \cap B = \{ \langle \mu_{A \cap B}(x) / x \rangle \}, \quad (12)$$

где $(\forall x \in X) \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Пересечение соответствует логической операции И.

Для условий предыдущего примера результат операции пересечения будет иметь вид (рисунок 14):

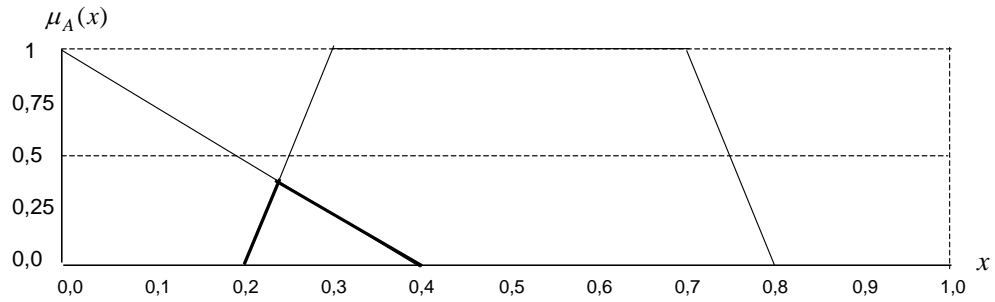


Рисунок 14 – Результат выполнения операции пересечения

Операция дополнения

Дополнением нечеткого множества \tilde{A} называется множество

$$\neg A = \{ \langle \mu_{\neg A}(x) / x \rangle \}, \quad (13)$$

где $(\forall x \in X)(\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x))$.

Дополнение соответствует логическому отрицанию НЕ.

Носителем нечеткого множества $\neg A$ будет являться множество

$$S_{\neg A} = X \setminus S_A,$$

т.е. множество тех элементов $x \in X$, для которых функция принадлежности $\mu_A(x) \neq 1$.

Предположим, на интервале от $[0,1; 0,5]$ функция принадлежности описывается выражением:

$$\mu_1(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a \\ \frac{x-a}{c-a}, & \text{если } a < x \leq c \\ \frac{b-x}{b-c}, & \text{если } c < x < b \\ 0, & \text{если } x \geq b \end{cases}$$

Графическое изображение функции при $a = 0,1$ $c = 0,3$ и $b = 0,5$ приведено на рисунке 15. На этом же рисунке приведена и функция $\mu_{\neg A}(x)$.

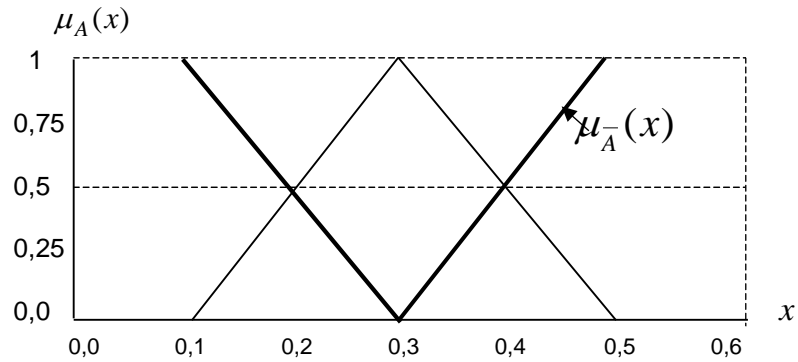


Рисунок 15 – Результат выполнения операции дополнения

Очевидно, что $\overline{\overline{A}} = A$.

Операция возведения в степень

На основе операции алгебраического произведения определяется операция **возведения в степень α** нечеткого множества A , где α - положительное число.

Нечеткое множество A^α определяется функцией принадлежности $\mu_{A^\alpha} = \mu_A^\alpha(x)$.

Частным случаем возведения в степень являются операции:

$CON(A) = A^2$ - операция *концентрирования*,

$DIL(A) = A^{0,5}$ - операция *растяжения*,

которые используются при работе с лингвистическими неопределенностями.

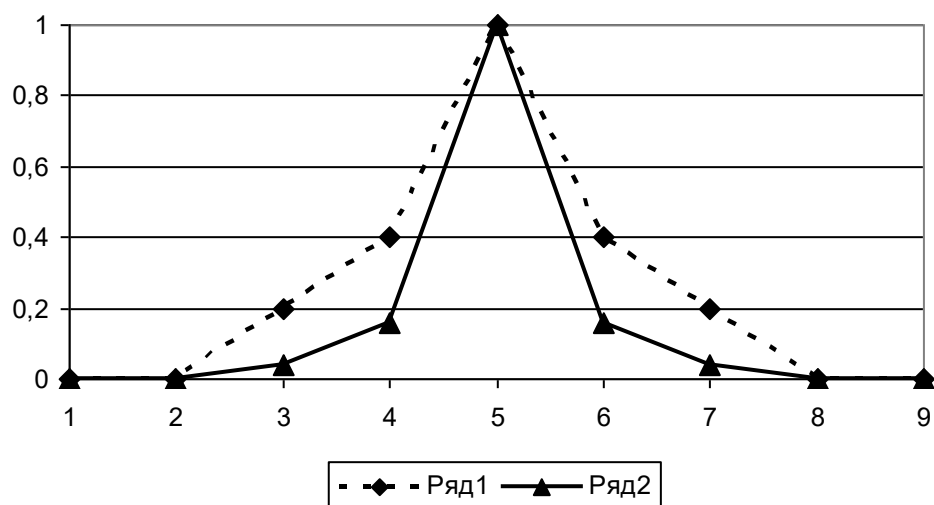


Рисунок 16 – Иллюстрация операции возведения в степень:

Ряд 1 – Исходная функция принадлежности;

Ряд 2 – Функция принадлежности нечеткого множества A^2 ;

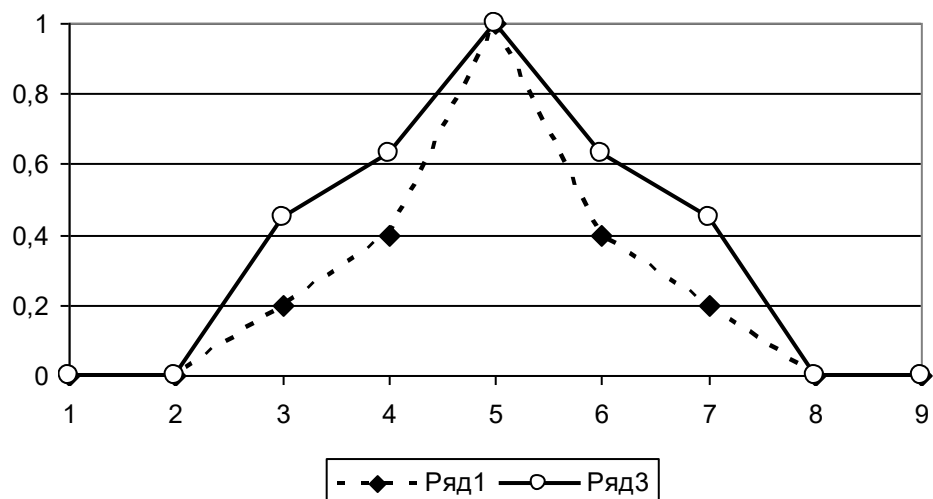


Рисунок 17 – Иллюстрация операции возведения в степень:
 Ряд 1 – Исходная функция принадлежности;
 Ряд 3 – Функция принадлежности нечеткого множества $A^{0.5}$

Разность

Разностью нечетких множеств называется множество

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

с функцией принадлежности:

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A \cap \bar{B}}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$$

Разность нечетких множеств $B - A$ определяется как

$$B - A = \bar{A} \cap B.$$

Включение

Пусть **A** и **B** - нечеткие множества на универсальном множестве E . Говорят, что **A** содержится в **B**, если $\forall x \in E \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$. Обозначение: $A \subset B$. Иногда используют термин "доминирование", т.е. в случае, когда $A \subset B$, говорят, что **B** доминирует **A** (рис. 3.18).

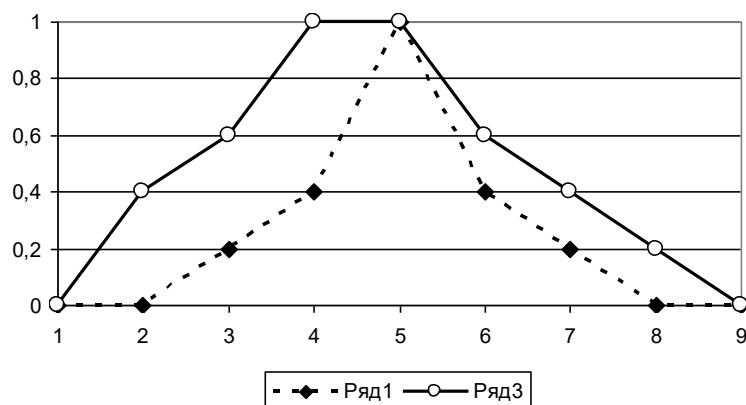


Рисунок 3.18 – Иллюстрация операции включения:

Ряд 1 – Функция принадлежности $\mu_A(x)$;

Ряд 3 – Функции принадлежности $\mu_B(x)$

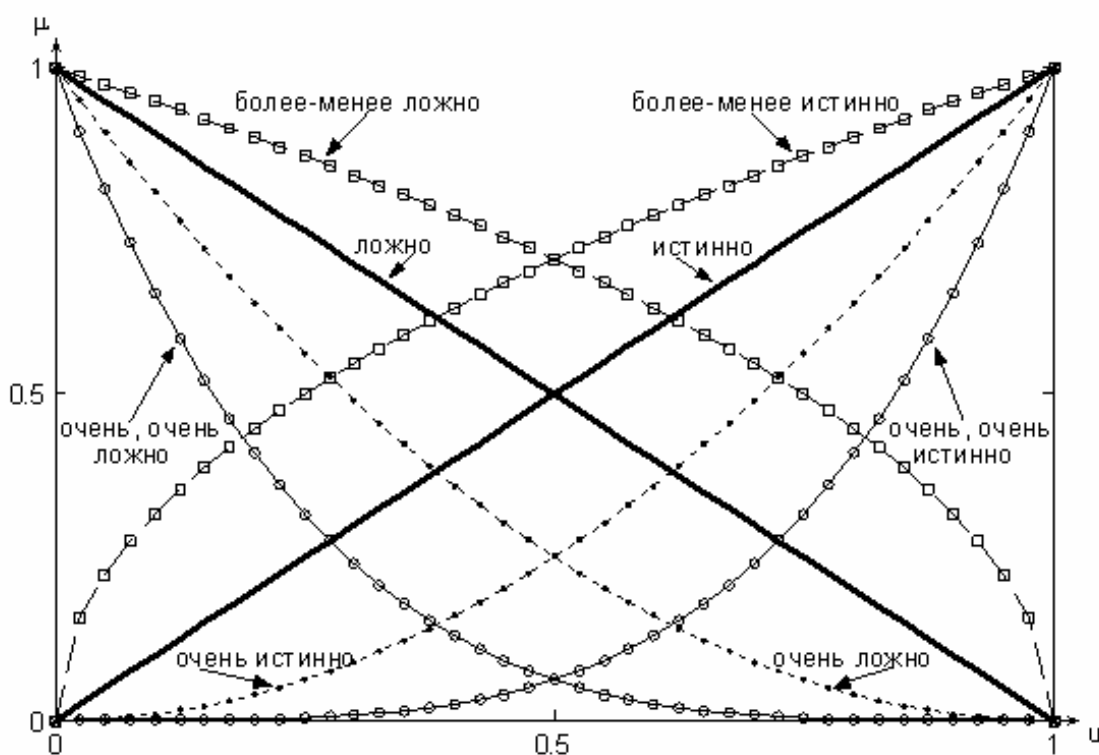


Рис 19 – Функции принадлежности термов, полученных с помощью синтаксических правил

Новые термы образуются с использованием квантификаторов "очень" и "более-менее"; для полученных термов функция принадлежности вычисляется по семантическим правилам: квантификатор очень t , более-менее t .

4 ОЦЕНКА СОГЛАСОВАННОСТИ ЭКСПЕРТНЫХ ЗНАНИЙ

Для анализа согласованности экспертной информации рассмотрим понятие расстояния $\rho(A, B)$ между нечеткими множествами A и B .

В литературе приводятся различные определения расстояния между нечеткими множествами, в частности рассмотрим два наиболее часто встречающихся определения понятия расстояния.

Расстояние Хемминга (или линейное расстояние):

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$$

Евклидово или квадратичное расстояние:

$$\varepsilon(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}, \quad \varepsilon(A, B) \in [0, \sqrt{n}]$$

Расстояние Хемминга

$$d(A, B) = |\mu_A(x_1) - \mu_B(x_1)| + |\mu_A(x_2) - \mu_B(x_2)| + \dots + |\mu_A(x_n) - \mu_B(x_n)|$$

Показатель различия между моделями двух экспертов, i -го и j -го, в рамках l -го термина определяется как линейное расстояние (Хемминга) между нечеткими множествами с функциями принадлежности $\mu_{il}(x)$ и $\mu_{jl}(x)$.

$$d = \int_0^1 |\mu_{il}(x) - \mu_{jl}(x)| dx. \quad (14)$$

Показатель согласованности между этими же моделями определяется величиной k

$$k_{ij} = \frac{\int_0^1 \min[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] dx}{\int_0^1 \max[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] dx}. \quad (15)$$

2 ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Для использования в моделях принятия решений информации, формализованной на основе теории нечетких множеств, необходимы процедуры построе-

ния соответствующих функций принадлежности. Различные методы построения функций принадлежности нечетких множеств классифицируются по некоторым аспектам:

- 1) предполагаемый вид области определения нечеткого множества: числовая – дискретная или непрерывная и нечисловая;
- 2) применяемый способ экспертного опроса: индивидуальный, групповой;
- 3) интерпретация данных экспертного опроса: вероятностная, детерминированная.

Для построения функции принадлежности используются: а) метод деления значений ФП пополам (прямой метод); б) метод парных сравнений (косвенный метод); в) метод с использованием типовых функций.

При применении прямого метода эксперт задает значения функции принадлежности для $x \in X$. Обычно прямые методы используются для измеримых признаков, например, годовой доход, скорость машины и т.п. При таком подходе часто используют групповые экспертные оценки.

Косвенные методы построения функции принадлежности используются в случаях, когда отсутствуют количественные признаки, необходимые для определения нечеткого множества. На практике широкое распространение получил метод парных сравнений (метод анализа иерархий).

В качестве типовых форм функций принадлежности могут использоваться различные функции, в частности треугольная, трапециевидная, колоколообразная и др. Форма функции принадлежности определяется разработчиком исходя из условий простоты, удобства и эффективности использования. На использовании типовых функций основан метод параметрического определения функции принадлежности с участием одного эксперта. В соответствии с данным методом вид функции принадлежности задается аксиоматически, а ее параметры непосредственно оцениваются экспертом. Например, при использовании треугольной формы эксперт указывает значения базовой переменной x , для которых функция принадлежности принимает единичное и нулевые значения. Параметрическое представление ФП является компактным, обеспечивает простоту их построения, однако связано с исследованием адекватности использо-

вания конкретной типовой функции аналитическому описанию функции принадлежности.

2.1 Построение функции принадлежности одним экспертом

Рассмотрим нечеткое понятие «засоренность хлебостоя». Определим «засоренность» как лингвистическую переменную (ЛП). Базовый набор значений данной ЛП определим как (рисунок 1.20):

$V = \{\text{очень малая, малая, средняя, повышенная, очень большая}\}$

Для ЛП «засоренность» базовая шкала – это числовая шкала от 0 до 100 %, а функция принадлежности определяет, насколько мы уверены в том, что данное количество процентов можно отнести к конкретной категории засоренности. На рисунке 20 отражено, как одни и те же значения базовой шкалы могут участвовать в определении различных нечетких множеств (НМ).

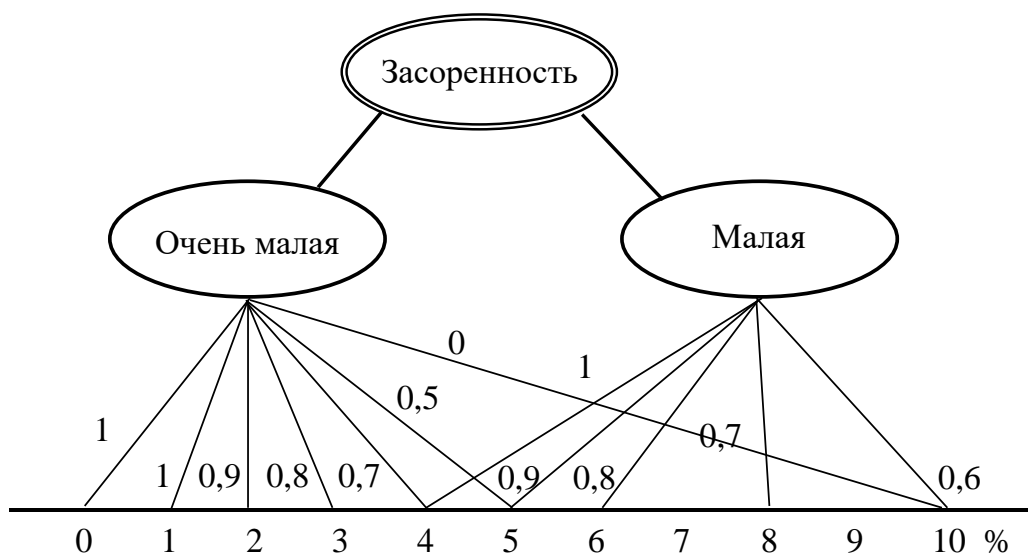


Рисунок 20 – Базовая шкала ЛП «засоренность»

Например, определить значение НМ «очень малая» можно так.

Рисунок 21 иллюстрирует оценку нечеткого множества экспертом, который засоренность хлебостоя до 2% с высокой степенью уверенности относит к очень малой ($\mu = 1$). Засоренность хлебостоя до 6% причисляется к очень малой тоже, но с меньшей степенью уверенности ($0,5 < \mu < 0,9$), а десять процентов засоренности очень малой считаться не может.

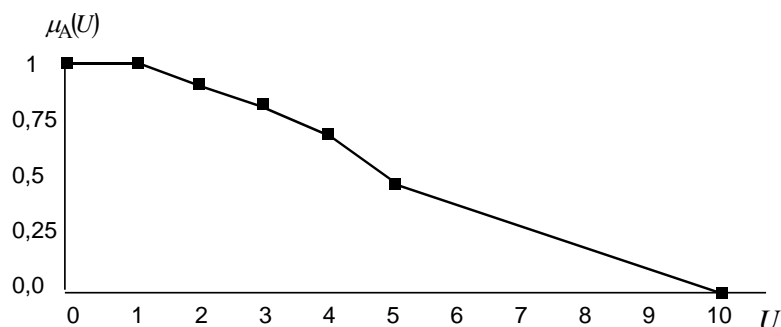


Рисунок 21 – Функция принадлежности терма лингвистической переменной «засоренность очень малая»

2.2 Построение функции принадлежности с использованием метода экспертной оценки

С помощью функции принадлежности можно отразить мнение одного или нескольких экспертов. Это связано с неспособностью человека формулировать свое количественное впечатление в виде однозначного числа. Суть методики заключается в следующем. Имеется m экспертов, часть из которых на вопрос о принадлежности элемента $x \in X$ нечеткому множеству A отвечает положительно. Обозначим их число n_1 . Другая часть экспертов $n_2 = m - n_1$ отвечает на этот вопрос отрицательно. Тогда принимаем, что функция принадлежности может быть описана выражением

$$\mu_A(x) = \frac{n_1}{n_1 + n_2}. \quad (16)$$

В качестве примера использования данной методики рассмотрим построение функции принадлежности для терма лингвистической переменной «Засоренность» – «Засоренность очень малая». Анализ литературных данных и практического опыта показал, что множество $X = \{0 - 60\}$ является базовым. Требуется построить нечеткое множество A , формализующее нечеткое понятие «Засоренность очень малая». Результаты опроса шести экспертов дали такие результаты (таблица 1).

Если на вопрос о принадлежности элемента $x \in X$ нечеткому множеству A эксперт отвечает положительно, то в таблицу заносим знак «+», если отрица-

тельно, то знак «–». Обозначим число положительных знаков как n_1 , а число отрицательных знаков как $n_2 = m - n_1$.

Таблица 1 – Результат опроса экспертов

Эксперты	X									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–
2	+	+	+	+	+	+	+	+	–	–
3	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–
4	+	+	+	+	+	–	–	–	–	–
5	+	+	+	+	–	–	–	–	–	–
6	+	+	+	+	+	+	+	–	–	–
$n_1=$	6	6	6	6	5	4	2	1	0	0
$n_2=$	0	0	0	0	1	2	4	5	6	6

Используя формулу (3.1), определяем функцию принадлежности:

$$\mu_A(x_1) = \frac{6}{6} = 1; \mu_A(x_2) = \frac{6}{6} = 1; \mu_A(x_3) = \frac{6}{6} = 1; \mu_A(x_4) = \frac{6}{6} = 1; \mu_A(x_5) = \frac{5}{6} = 0,83;$$

$$\mu_A(x_6) = \frac{4}{6} = 0,67; \mu_A(x_7) = \frac{2}{6} = 0,33; \mu_A(x_8) = \frac{1}{6} = 0,17; \mu_A(x_9) = \frac{0}{6} = 0; \mu_A(x_{10}) = \frac{0}{6} = 0.$$

Тогда формальная запись нечеткого множества A будет такой:

$$A < \frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{0,83}{5}; \frac{0,67}{6}; \frac{0,33}{7}; \frac{0,17}{8}; \frac{0}{9}; \frac{0}{10} >.$$

Результаты анализа показывают, засоренность равная от 1 до 4% считается очень малой со степенью уверенности равной 1. Засоренность свыше 9% считаться очень малой не может (рисунок 22).

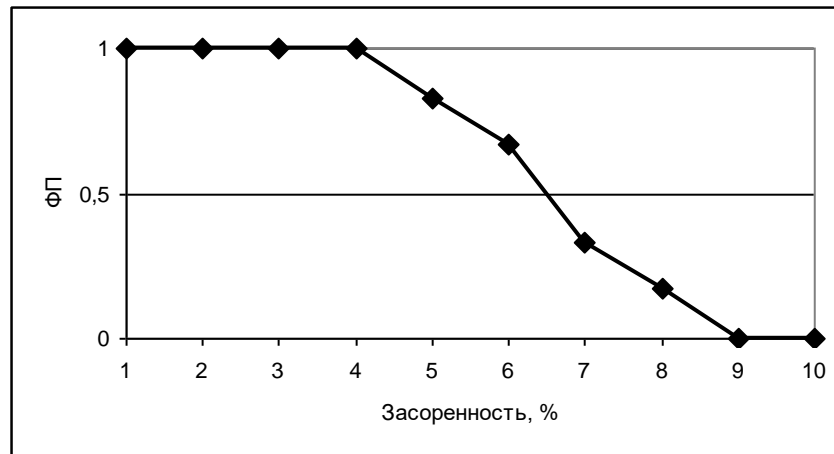


Рисунок 22 – Функция принадлежности для термина «Засоренность очень малая»

2.3 Метод деления значений функции принадлежности пополам

Методику построения функции принадлежности (ФП) рассмотрим на модельном примере: «Определить семантику и термы лингвистической переменной «Полеглость хлебостоя» (в дальнейшем «полеглость»).

Методика решения задачи предусматривает выполнение этапов [5]:

1 этап. Определение термов лингвистической переменной (ЛП).

В нашем случае это могут быть, например, «Полеглость большая»; «Полеглость средняя»; «Полеглость малая».

2 этап. Ранжирование термов.

В данном случае можно выполнить ранжирование типа «по возрастанию». Таким образом, результатом выполнения этапа будет последовательность:

1 – «Полеглость малая»; 2 – «Полеглость средняя»; 3 – «Полеглость большая».

3 этап. Определение интервалов термов (то есть назначение левой и правой границ интервала). В каждом конкретном случае эти границы будут различны. В нашем примере лингвистическая переменная «Полеглость» имеет крайнюю левую границу 0 (прямостоящий хлебостой), а крайнюю правую – 1 (полностью полегший хлебостой) (в примере используются доли от 1). Промежуточные значения выбираются на основе субъективного суждения.

4 этап. Графическое изображение установленных границ интервалов термов (рисунок 23).

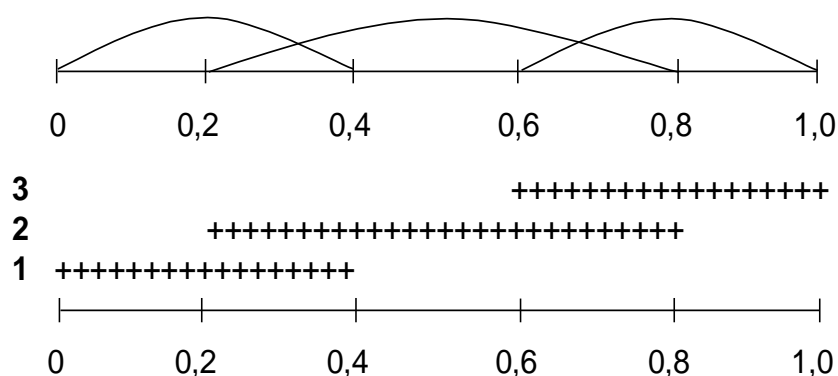


Рисунок 23 – Границы интервалов

5 этап. Корректировка границ интервалов термов (необязательный этап).

6 этап. Выбор метода построения ФП. В данном примере используем метод деления значений ФП пополам.

7 этап. Определение семантики термина лингвистической переменной.

7.1 Рассмотрим 1 терм: «Полеглость малая». Для него определим значения ФП в граничных точках интервала. В граничной точке 0,0 ФП равна 1, так как если полеглость равна нулю, то она естественно малая и ФП принимает максимальное значение. В граничной точке 0,4 ФП равна 0, так как ранее на основе субъективного суждения мы приняли, что при $P > 0,4$ полеглость не может быть малой.

Граничные значения интервала	0,0	0,4
------------------------------	-----	-----

Значения ФП	1	0
-------------	---	---

Нахождение значений ФП в данном интервале.

Для этого можно использовать 3, 5, 7, 9 кратное разбиение интервала (следует помнить, что чем больше кратность разбиения, тем выше точность построения ФП).

Для простоты воспользуемся 3-х кратным разбиением. Методика разбиения состоит в следующем:

- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,5) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,0 и 0,4. Предположим, что это бу-

дет значение аргумента равное 0,35. Назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,25) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,35 и 0,4. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,38.

- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,75) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,0 и 0,35. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,12.

Таким образом, результаты выполнения предыдущих действий для данного терма будут такими (рисунок 24):

Значения аргумента	0,0	0,12	0,35	0,38	0,40
Степени принадлежности	1,0	0,75	0,50	0,25	0,0

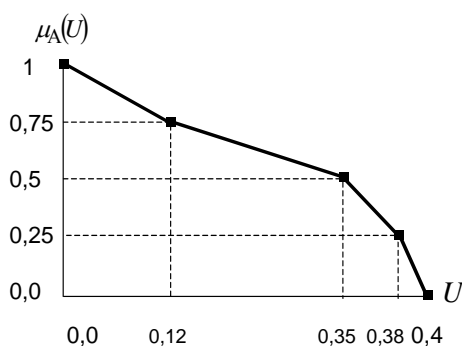


Рисунок 24 – графическое изображение результатов для терма «полеглость малая»

7.2 Рассмотрим 2 терм и определим семантику терма «полеглость средняя». Для него определим значения ФП в граничных точках. В этом случае значения ФП равны 0, так как и меньше $P < 0,2$ и при $P > 0,8$ полеглость не может считаться средней.

Граничные значения	0,2	0,8
Значения ФП	0	0

Нахождение значений ФП в данном интервале.

Для простоты воспользуемся 3-х кратным разбиением. Методика разбиения состоит в следующем:

- назначьте значение аргумента, при котором ФП уже равна 1, и значение аргумента, при котором она еще равна 1. Предположим, это будут значения аргумента равные 0,3 и 0,7 (рисунок 25).

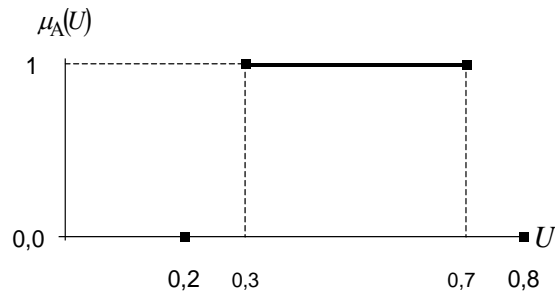


Рисунок 25 – значения аргумента, при котором ФП принимает значение 1,0

- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,5) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,2 и 0,3. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,27.
- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,75) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,27 и 0,3. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,282.
- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,25) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,2 и 0,27. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,24.

Рассмотрим правый полуинтервал для терма «Полеглость средняя».

- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,5) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,7 и 0,8. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,74.
- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,75) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,7 и 0,74. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,72.
- назначьте значение аргумента, для которого значение ФП (0,25) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,74 и 0,8. Предположим, что это будет значение аргумента равное 0,76.

Таким образом, результаты выполнения предыдущих действий для терма «Полеглость средняя» будут такими:

Значения аргумента	0,2	0,24	0,27	0,282	0,3
--------------------	-----	------	------	-------	-----

Степени принадлежности	0,0	0,250	0,500	0,750	1,0
Значения аргумента	0,7	0,72	0,74	0,76	0,8
Степени принадлежности	1,0	0,75	0,5	0,25	0

7.3 Рассмотрим 3 терм и определим семантику терма «Полеглость большая». Для него определим значения ФП в граничных точках.

Граничные значения	0,600	1,0
Значения ФП	0	1

Нахождение значений ФП в данном интервале.

Методика выполнения данного этапа аналогична 7.1, поэтому представим только конечные результаты.

- значение аргумента, для которого значение ФП (0,5) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,6 и 1,0 равно 0,7.
- значение аргумента, для которого значение ФП (0,25) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,6 и 0,7 равно 0,64.
- значение аргумента, для которого значение ФП (0,75) лежит посередине между значениями ФП для точек 0,7 и 1,0 равно 0,85.

Результаты выполнения расчетов для данного терма будут такими:

Значения аргумента	0,6	0,64	0,7	0,85	1,0
Степени принадлежности	0,0	0,250	0,500	0,750	1,0

Таким образом, в результате выполнения всех этапов можно построить функцию принадлежности лингвистической переменной «Полеглость».

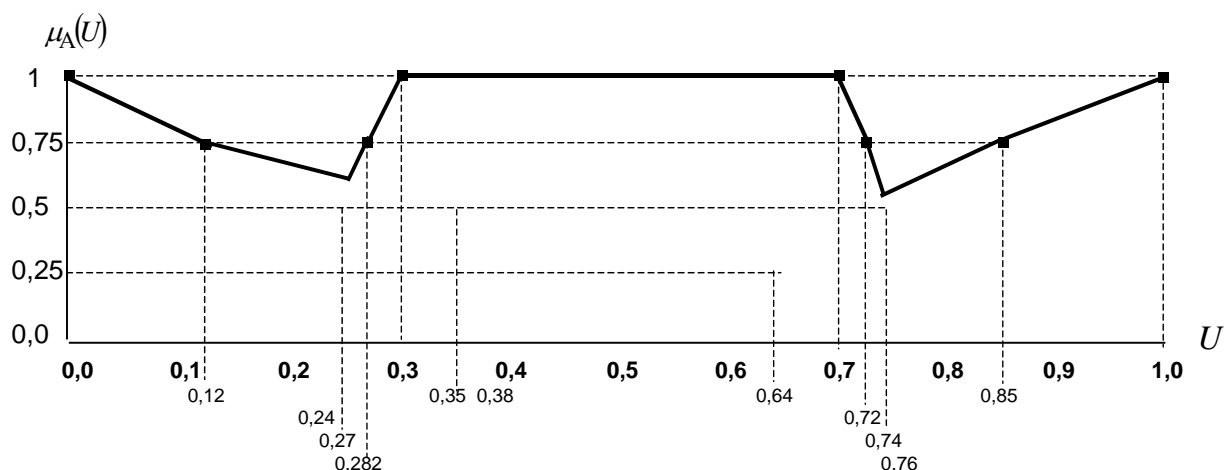


Рисунок 26 – Общий вид функции принадлежности

2.4 Косвенный метод построения функция принадлежности

Одним из возможных методов построения функции принадлежности является метод, основанный на количественном сравнении степеней принадлежности индивидуальным ЛПР (лицо, принимающее решение). Результатом опроса ЛПР является матрица $B = \|b_{ij}\|$ размера $n \times n$, где n – число точек u_i , в которых сравниваются значения функции принадлежности. Элемент b_{ij} матрицы B является субъективной оценкой отношения $\mu_A(u_i)/\mu_A(u_j)$ и показывает, во сколько раз, по мнению ЛПР, $\mu_A(u_i)$ больше $\mu_A(u_j)$. Величина назначается в соответствии с балльной шкалой, значения которой интерпретируются в соответствии со шкалой интенсивности.

По определению $b_{ii} = 1$ и с целью согласования оценок ЛПР устанавливается, что $b_{ji} = \frac{1}{b_{ij}}$. Поскольку матрица B является положительной по построению, решение этой задачи всегда существует и является единственным. Можно показать, что в этом случае

$$\mu_A(u_i) = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

При этом значения функции принадлежности $\mu_A(u_i)$ оказываются измеренными в шкале отношений.

Модельный пример

Для иллюстрации этапов решения задачи с помощью метода анализа иерархий рассмотрим пример. Для уборки зерновых культур необходимо приобрести зерноуборочный комбайн. На рынке имеются машины нескольких фирм одинакового целевого назначения. Какой зернокомбайн выбрать в соответствии с потребностями покупателя? Другими словами необходимо оценить весомость критериев к машине, которыми пользуется потребитель.

Рекомендуется такая последовательность этапов при решении задачи.

1. Очертите проблему и определите, что вы хотите узнать.
2. Постройте иерархию, начиная с вершины (цели - с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, по которым зависят последующие уровни) к самому нижнему уровню (который обычно является перечнем альтернатив).
3. Постройте матрицу парных сравнений для второго уровня.
4. Проверить согласованность, используя отклонение λ_{\max} от n .

Схема иерархии для рассматриваемой задачи приведена на рисунке 27. На первом (вышем) уровне находится общая цель – «Зернокомбайн». На втором уровне находятся показатели (критерии), уточняющие цель.

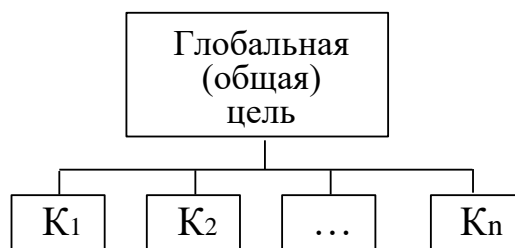


Рисунок 27 – Схема иерархии для решения проблемы выбора зернокомбайна

Примечание 1. В примере на втором уровне рассматриваются пять критериев. Такое количество выбрано лишь для иллюстрации метода и не связано с сутью рассматриваемой проблемы – выбора лучшего зернокомбайна.

Примечание 2. Издавна известны магические свойства числа семь. Так вот в МАИ для проведения обоснованных численных сравнений не рекомендуется сравнивать более чем 7 ± 2 элементов. Если же возникает потребность в расширении уровней 2 и 3, то следует использовать принцип иерархической декомпозиции. Другими словами если число критериев, например, превышает десятки, то необходимо элементы сгруппировать в сравниваемые классы приблизительно из семи элементов в каждом.

После выполнения работ на этапе иерархического представления проблемы необходимо установить приоритеты критериев. Для количественного определения сравнительной важности факторов в проблемной ситуации необходимо составить матрицу парных сравнений. Эта матрица представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Общий вид матрицы парных сравнений

Общее удовлетворение машиной	A_1	A_2	A_3	...	A_N
A_1	1/1	w_1/w_2	w_1/w_3	...	w_1/w_n
A_2	w_2/w_1	1/1	w_2/w_3	...	w_2/w_n
A_3	w_3/w_1	w_3/w_2	1/1	...	w_3/w_n
...	1/1	...
A_N	w_n/w_1	w_n/w_2	w_n/w_3	...	1/1

Здесь $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ – множество из n элементов; $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ – соответственно их веса или интенсивности.

Примечание 1. Цель составления подобной матрицы заключается в определении факторов с наибольшими величинами важности, чтобы затем сконцентрировать внимание на них при решении проблемы или разработке плана действий.

Примечание 2. Если ожидается, что w_1, w_2, \dots, w_n – неизвестны заранее (а это очень распространенная ситуация), то парные сравнения элементов производятся с использованием субъективных суждений, численно оцениваемых по

шкале (табл. 3). Если при сравнении одного вида деятельности с другим получено одно из вышеуказанных чисел (например, 3), то при сравнении второго вида деятельности с первым получаем обратную величину (т.е. 1/3).

Таблица 3 – Шкала весомости субъективных суждений

Интенсивность относительной важности	Определение	Объяснения
1	Равная важность	Равный вклад двух видов деятельности в цель
3	Умеренное превосходство одного над другим	Опыт и суждения дают легкое превосходство одному виду деятельности над другим
5	Существенное или сильное превосходство	Опыт и суждения дают сильное превосходство одному виду деятельности над другим
7	Значительное превосходство	Одному виду деятельности дается настолько сильное превосходство, что оно становится практически значительным
9	Очень сильное превосходство	Очевидность превосходства одного вида деятельности над другим подтверждается наиболее сильно
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Принимаются в компромиссном случае

Составим матрицу парных сравнений для нашей задачи (таблица 4).

Таблица 4 – Матрица парных сравнений, построенная на основе субъективных суждений

Общее удовлетворение комбайном	Пр.	П.з.	Нар.	Р.т.	Ст.
Производительность	1/1	5/1	4/1	5/1	3/1
Потери зерна	1/5	1/1	1/2	2/1	1/2
Наработка	1/4	2/1	1/1	1/1	1/4
Расход топлива	1/5	1/2	1/1	1/1	1/2
Стоимость	1/3	2/1	4/1	2/1	1/1

Синтез приоритетов

Одним из способов определения приоритетов является вычисление геометрического среднего. Это можно сделать, перемножая элементы в каждой строке и извлекая корень n -й степени, где n – число элементов. Полученный таким образом столбец чисел нормализуется делением каждого числа на сумму всех чисел. Последовательность расчета составляющих вектора приоритетов приведена в таблице 5.

Таблица 5 – Расчет вектора приоритетов

	A_1	A_2	A_3	A_4	Оценки компонент собственного вектора по строкам	Нормализация результата
A_1	$\frac{w_1}{w_1}$	$\frac{w_1}{w_2}$	$\frac{w_1}{w_3}$	$\frac{w_1}{w_4}$	$\sqrt[n]{\frac{w_1}{w_1} \cdot \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{w_1}{w_3} \cdot \frac{w_1}{w_4}} = a$	$\frac{a}{a+b+c+d} = X_1$
A_2	$\frac{w_2}{w_1}$	$\frac{w_2}{w_2}$	$\frac{w_2}{w_3}$	$\frac{w_2}{w_4}$	$\sqrt[n]{\frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{w_2}{w_2} \cdot \frac{w_2}{w_3} \cdot \frac{w_2}{w_4}} = b$	$\frac{b}{a+b+c+d} = X_2$
A_3	$\frac{w_3}{w_1}$	$\frac{w_3}{w_2}$	$\frac{w_3}{w_3}$	$\frac{w_3}{w_4}$	$\sqrt[n]{\frac{w_3}{w_1} \cdot \frac{w_3}{w_2} \cdot \frac{w_3}{w_3} \cdot \frac{w_3}{w_4}} = c$	$\frac{c}{a+b+c+d} = X_3$
A_4	$\frac{w_4}{w_1}$	$\frac{w_4}{w_2}$	$\frac{w_4}{w_3}$	$\frac{w_4}{w_4}$	$\sqrt[n]{\frac{w_4}{w_1} \cdot \frac{w_4}{w_2} \cdot \frac{w_4}{w_3} \cdot \frac{w_4}{w_4}} = d$	$\frac{d}{a+b+c+d} = X_4$

Для нашего примера значения вектора приоритетов (функции принадлежности) приведены в таблице 6.

Таблица 6 – Функция принадлежности

Общее удовлетворение комбайном	Вектор приоритетов, X_i
Производительность	0,491
Потери зерна	0,099
Наработка	0,104
Расход топлива	0,086
Стоимость	0,220

Метод состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений парным их сравнением. Конечным этапом реализации метода является определение вектора глобальных приоритетов

$$X_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_j b_{ji} , \quad (17)$$

где a_j – оценки нормализованного вектора локальных приоритетов верхнего уровня иерархии (весомость или значимость критериев, используемых для достижения глобальной цели); b_{ji} – оценки компонент нормализованного вектора локальных приоритетов нижнего уровня иерархии.

Оценки компонент собственного вектора e_1, e_2, \dots, e_n матрицы парных сравнений определяются как

$$e_1 = \sqrt[n]{a_{11}a_{12} \dots a_{1n}} , e_2 = \sqrt[n]{a_{21}a_{22} \dots a_{2n}} , \dots , e_n = \sqrt[n]{a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn}}$$

Для расчета вектора локальных приоритетов (b_1, b_2, \dots, b_n) используется нормализация компонент вектора матрицы парных сравнений

$$b_i = \frac{e_i}{\sum_i^n e_i} .$$

2.5 Построение функции принадлежности с использованием типовых функций

В соответствии с данным методом вид функции принадлежности задается аксиоматически, а ее параметры непосредственно оцениваются лицом, принимающим решения. Например, в случае треугольной формы функции принадлежности ЛПР указывает такие ее параметры u_1, u_2, u_3 при которых она принимает единичное и нулевые значения, т. е. $\mu_A(u_2) = 1$ и для всех $u \leq u_1, u \geq u_3$ имеет место $\mu_A(u) = 0$.

Параметрическое представление функций принадлежности является компактным, обеспечивает простоту построения их на практике, однако связано с исследованием адекватности используемых форм (треугольной, трапецевид-

ной, колоколообразной и др.) и соответствующих аналитических описаний функции принадлежности.

Конкретный вид функций принадлежности определяется на основе различных дополнительных предположений о свойствах этих функций (симметричность, монотонность, непрерывность первой производной и т.д.) с учетом специфики имеющейся неопределенности.

Методику построения функции принадлежности (ФП) рассмотрим на примере определения семантики и термов лингвистической переменной «Засоренность» – «ЗАС».

Методика решения задачи предусматривает выполнение этапов:

1 этап. Определение термов лингвистической переменной (ЛП). В нашем случае термы таковы: «Очень малая»; «Малая»; «Средняя»; «Высокая».

2 этап. Ранжирование термов.

В данном случае можно выполнить ранжирование "по возрастанию". Таким образом, результатом выполнения этапа будет последовательность:

1 – "Очень малая"; 2 – "Малая"; 3 – "Средняя"; 4 – "Высокая".

3 этап. Определение интервалов термов (то есть назначение левой и правой границ интервала). В каждом конкретном случае эти границы будут различны. В нашем примере лингвистическая переменная «ЗАС» имеет крайнюю левую границу 0%, а крайнюю правую – 60%. Промежуточные значения выбираются на основе практического опыта. Граничные пары значений термов установлены такими, как представлены в таблице 7

Таблица 7 – Левая и правая границы интервалов термов

Номер и наименование терма	Левая граница	Правая граница
1 – "Очень малая"	0	10
2 – "Малая"	5	30
3 – "Средняя"	20	50
4 – "Высокая"	35	60

4 этап. Графическое изображение установленных границ интервалов термов (рисунок 28).

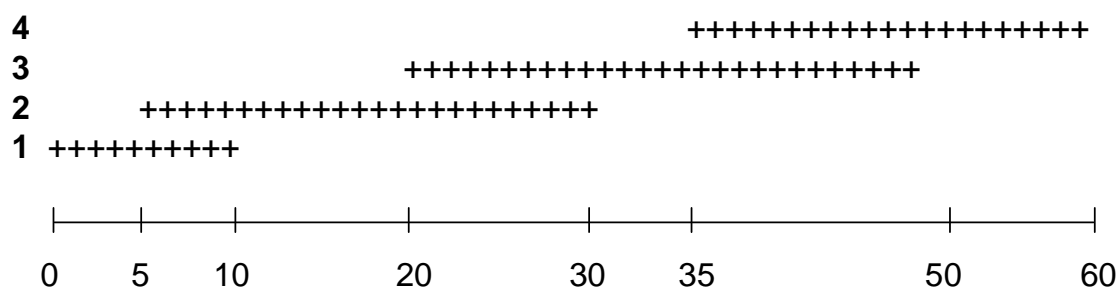


Рисунок 28 – Границы интервалов

5 этап. Корректировка границ интервалов термов (необязательный этап).

6 этап. Выбор метода построения ФП.

Для построения функций принадлежности используются функции:

$$1) \quad \mu(x, a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a}, & \text{если } a < x < b \\ 0, & \text{если } x \geq b \end{cases} \quad (18)$$

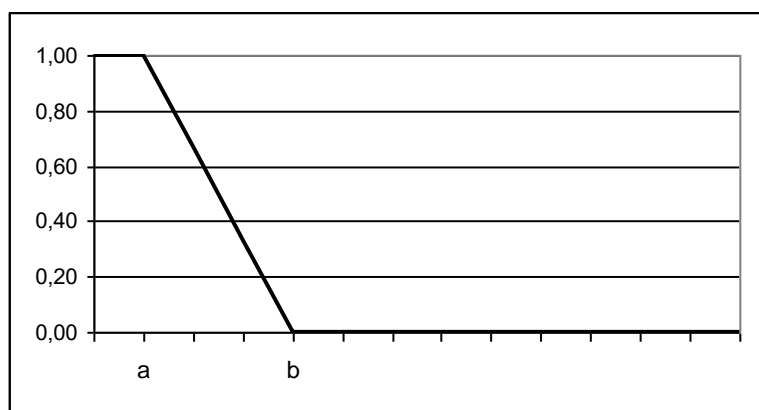


Рисунок 29 – ФП для выражения (18)

$$2) \quad \mu_1(x, a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x < b \\ 1, & \text{если } x \geq b \end{cases} \quad (19)$$

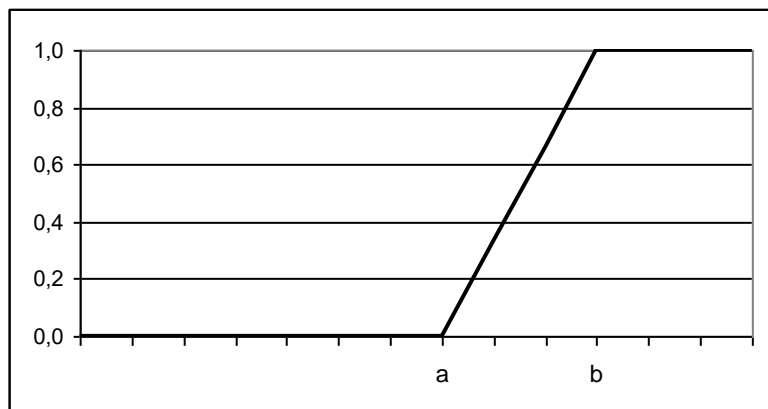


Рисунок 30 – ФП для выражения (19)

3)

$$\mu(x,a,b,c) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a \\ \frac{x-a}{c-a}, & \text{если } a < x \leq c \\ \frac{c-a}{b-x}, & \text{если } c < x < b \\ \frac{b-c}{b-x}, & \text{если } c < x < b \\ 0, & \text{если } x \geq b \end{cases} \quad (20)$$

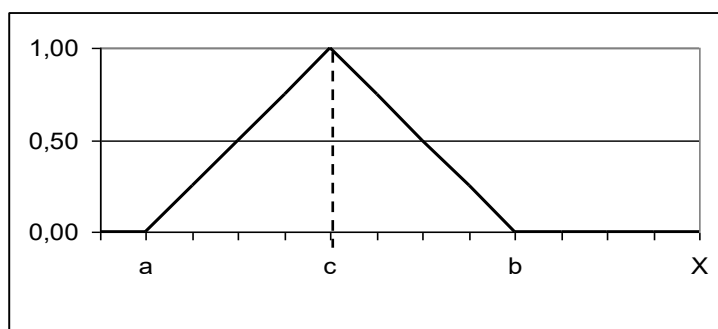


Рисунок 31 – ФП для выражения (20)

4)

$$\mu_3(x,a,b,c,d) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a \\ \frac{x-a}{c-a}, & \text{если } a < x < c \\ 1, & \text{если } c \leq x \leq d \\ \frac{b-x}{b-d}, & \text{если } d < x < b \\ 0, & \text{если } x \geq b \end{cases} \quad (21)$$

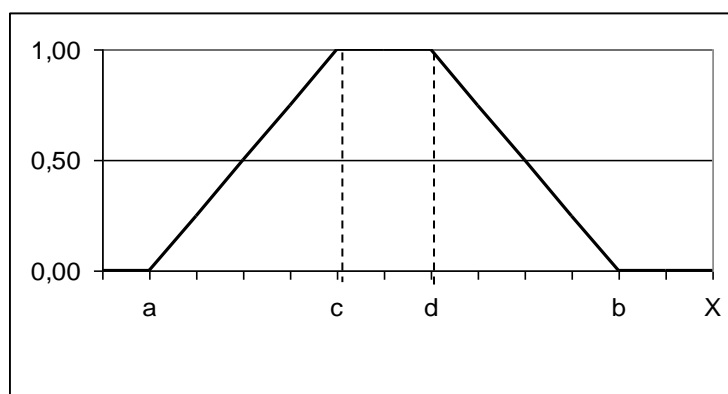


Рисунок 32 – ФП для выражения (21)

$$6) \quad \mu(x, a, b) = \exp \left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2} \right] \quad (22)$$

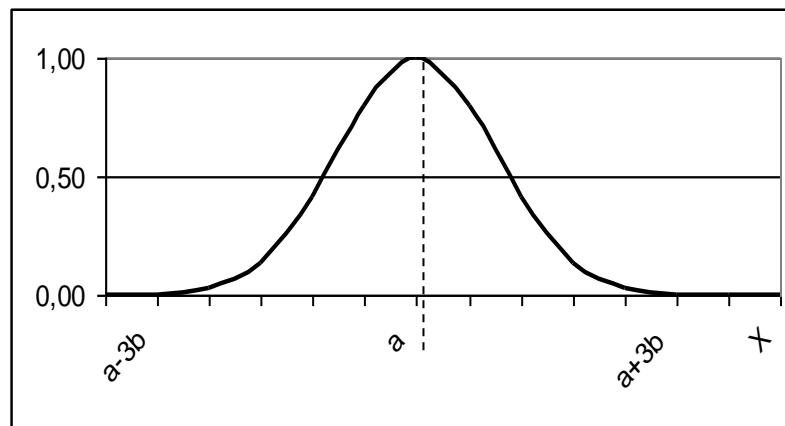


Рисунок 33 – ФП для выражения (22)

6. ВЫБОР В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

При решении задач выбора (оценки) в условиях неопределенности целесообразно использовать лингвистический подход, основанный на теории нечетких множеств.

В данном случае, для поиска решения необходимо иметь набор правил, адекватно отражающий суть предметной области. В качестве примера можно использовать продукционные правила, основанные на формате «Если-То». Эти правила являются основой базы знаний экспертной системы и служат для построения механизма вывода решений. Построение базы знаний осуществляется совместно экспертом предметной области и инженером по знаниям.

Правила базы знаний имеют вид:

Правило 1. Если: Цена поставок должна быть низкая.

То: Поставщик 1 подходит плохо.

Поставщик 2 подходит хорошо.

Поставщик 3 подходит плохо.

Поставщик 4 подходит удовлетворительно.

Правило 2. Если: Уровень цены поставок может быть средний.

То: Поставщик 1 подходит удовлетворительно.

Поставщик 2 подходит хорошо.

Поставщик 3 подходит удовлетворительно.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Правило 3. Если: Цена поставок может быть высокой.

То: Поставщик 1 подходит хорошо.

Поставщик 2 подходит хорошо.

Поставщик 3 подходит хорошо.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Правило 4. Если: Условия оплаты не имеют значения.

То: Поставщик 1 подходит хорошо.

Поставщик 2 подходит хорошо.

Поставщик 3 подходит хорошо.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Правило 5. Если: Требования к условиям оплаты не жесткие.

То: Поставщик 1 подходит хорошо.

Поставщик 2 подходит удовлетворительно

Поставщик 3 подходит удовлетворительно.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Правило 6. Если: Требования к условиям оплаты — кредитование.

То: Поставщик 1 подходит хорошо.

Поставщик 2 подходит плохо.

Поставщик 3 подходит плохо.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Правило 7. Если: Требования к качеству продукции не высокие.

То: Поставщик 1 подходит хорошо.

Поставщик 2 подходит хорошо.

Поставщик 3 подходит хорошо.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Правило 8. Если: Требования к качеству продукции средние.

То: Поставщик 1 подходит хорошо.

Поставщик 2 подходит удовлетворительно.

Поставщик 3 подходит удовлетворительно.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Правило 9. Если: Требования к качеству продукции высокие.

То: Поставщик 1 подходит удовлетворительно.

Поставщик 2 подходит плохо.

Поставщик 3 подходит плохо.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Правило 10. Если: Контракт заключается на 1 поставку.

То: Поставщик 1 подходит хорошо.

Поставщик 2 подходит плохо.

Поставщик 3 подходит плохо.

Поставщик 4 подходит удовлетворительно.

Правило 11. Если: Контракт заключается на небольшой период.

То: Поставщик 1 подходит плохо.

Поставщик 2 подходит хорошо.

Поставщик 3 подходит плохо.

Поставщик 4 подходит удовлетворительно.

Правило 12. Если: Контракт заключается на среднесрочной основе.

То: Поставщик 1 подходит плохо.

Поставщик 2 подходит удовлетворительно.

Поставщик 3 подходит хорошо.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Правило 13. Если: Контракт заключается на долгосрочной основе.

То: Поставщик 1 подходит плохо.

Поставщик 2 подходит плохо.

Поставщик 3 подходит плохо.

Поставщик 4 подходит хорошо.

Для оценки поставщиков рассмотрим лингвистическую переменную (ЛП)
 X = привлекательность поставщика, определенную на универсальном множестве U .

Базовое терм-множество X имеет вид:

$$T(X) = \{\text{плохая, удовлетворительная, хорошая}\}.$$

Значения функций принадлежности термов ЛП представлены в табл. 8 и на рис. 34.

Таблица 8 – Структура ЛП «привлекательность поставщика»

Термы ЛП	Значения базовой переменной										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1.0
	Значения функции принадлежности										
Плохая	1,00	1,00	0,85	0,30	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Удовлетво- рительная	0,00	0,00	0,00	0,25	0,70	1,00	0,70	0,25	0,00	0,00	0,00
Хорошая	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,30	0,85	1,00	1,00

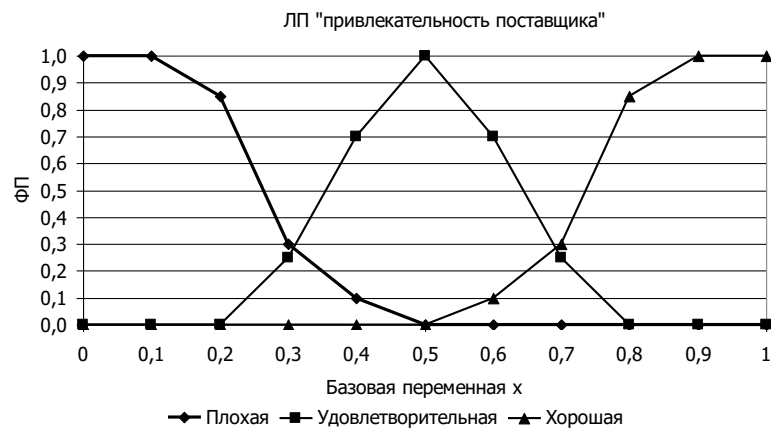


Рис. 34 – Функция принадлежности ЛП «привлекательность поставщика»

Модельный пример решения задачи

Для решения задачи выбора поставщика в нечетких условиях используем логический вывод, который реализуется за 4 этапа.

1. Выбрать продукционные правила, соответствующие исходным требованиям.
2. Для каждого поставщика по каждому выбранному правилу определить лингвистическую переменную, отражающую привлекательность поставщика с точки зрения данного правила.
3. Для каждого поставщика определить функцию совместимости его привлекательности с учетом всех правил как выпуклую комбинацию функций совместимости, определенных на шаге 2 для отдельных правил.

4. По полученным функциям совместимости выбрать наиболее привлекательного поставщика.

Исходные требования к поставщикам могут быть следующие:

- ◆ цена поставок должна быть низкая;
- ◆ условия оплаты не имеют значения;
- ◆ требования к качеству продукции высокие;
- ◆ контракт заключается на среднесрочной основе.

В соответствии с этими исходными требованиями на шаге 1 выбираются производственные правила 1, 4, 9, 12.

По этим правилам на шаге 2 для Поставщика 1 определяем:

по цене подходит плохо;

по условиям оплаты подходит хорошо;

по качеству подходит удовлетворительно;

по продолжительности контракта подходит плохо.

Для Поставщика 2 определяем:

по цене подходит хорошо;

по условиям оплаты подходит хорошо;

по качеству подходит плохо;

по продолжительности контракта подходит удовлетворительно.

Для Поставщика 3 определяем:

по цене подходит плохо;

по условиям оплаты подходит хорошо;

по качеству подходит плохо;

по продолжительности контракта хорошо.

Для Поставщика 4 определяем:

по цене подходит удовлетворительно;

по условиям оплаты подходит хорошо;

по качеству подходит хорошо;

по продолжительности контракта подходит хорошо.

На шаге 3 определим функцию совместимости привлекательности каждого поставщика с учетом всех правил как выпуклую комбинацию функций совместимости для отдельных правил.

Для нашего примера примем, что все параметры (цена, условия оплаты, качество поставок, длительность контракта) равнозначны с точки зрения общей привлекательности, т.е. весовые коэффициенты выпуклой комбинации равны:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0,25,$$

$$\sum_{i=1}^4 \omega_i = 1.$$

Для поставщика 1 определяем:

$$\begin{aligned} M_1 (\text{привлекательность Поставщика 1}) &= \\ &= 0,25 \times M(\text{плохая}) + 0,25 \times M(\text{хорошая}) + 0,25 \times M(\text{удовлетворительная}) + 0,25 \\ &\times M(\text{плохая}) = \\ &\left\{ \frac{0,5}{0}, \frac{0,5}{0,1}, \frac{0,425}{0,2}, \frac{0,2125}{0,3}, \frac{0,225}{0,4}, \frac{0,25}{0,5}, \frac{0,2}{0,6}, \frac{0,1375}{0,7}, \frac{0,2125}{0,8}, \frac{0,25}{0,9}, \frac{0,25}{1} \right\} \end{aligned}$$

Для поставщика 2 определяем:

$$\begin{aligned} M_2 (\text{привлекательность Поставщика 2}) &= \\ &= 0,25 \times M(\text{хорошая}) + 0,25 \times M\{\text{хорошая}\} + 0,25 \times M(\text{плохая}) + \\ &+ 0,25 \times M(\text{удовлетворительная}) = \\ &\left\{ \frac{0,25}{0}, \frac{0,25}{0,1}, \frac{0,2125}{0,2}, \frac{0,1375}{0,3}, \frac{0,2}{0,4}, \frac{0,25}{0,5}, \frac{0,225}{0,6}, \frac{0,2125}{0,7}, \frac{0,425}{0,8}, \frac{0,5}{0,9}, \frac{0,5}{1} \right\} \end{aligned}$$

Для поставщика 3 определяем:

$$\begin{aligned} M_3 (\text{привлекательность Поставщика 3}) &= \\ &= 0,25 \times M\{\text{плохая}\} + 0,25 \times M\{\text{хорошая}\} + 0,25 \times M(\text{плохая}) + 0,25 \times \\ &M(\text{хорошая}) = \\ &\left\{ \frac{0,5}{0}, \frac{0,5}{0,1}, \frac{0,425}{0,2}, \frac{0,15}{0,3}, \frac{0,05}{0,4}, \frac{0,0}{0,5}, \frac{0,05}{0,6}, \frac{0,15}{0,7}, \frac{0,425}{0,8}, \frac{0,5}{0,9}, \frac{0,5}{1} \right\}. \end{aligned}$$

Для поставщика 4 определяем:

$$\begin{aligned} M_4 (\text{привлекательность Поставщика 4}) &= \\ &= 0,25 \times M(\text{удовлетворительная}) + 0,25 \times M(\text{хорошая}) + 0,25 \times \\ &M\{\text{хорошая}\} + 0,25 \times M(\text{хорошая}) = \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{0,0}{0}, \frac{0,0}{0,1}, \frac{0,0}{0,2}, \frac{0,0625}{0,3}, \frac{0,175}{0,4}, \frac{0,25}{0,5}, \frac{0,25}{0,6}, \frac{0,2875}{0,7}, \frac{0,6375}{0,8}, \frac{0,75}{0,9}, \frac{0,75}{1} \right\}$$

На 4 этапе осуществляем выбор наиболее привлекательного поставщика по полученным функциям совместимости.

Для этого можно использовать выбор по обобщенному расстоянию Хемминга. В этом случае целесообразно стремиться к тому, чтобы оценка привлекательности была как можно ближе к 1. Эту цель можно изобразить с помощью нечеткого множества S «число, близкое к 1».

Функция принадлежности нечеткого множества S имеет вид (рис. 35):

$$S = \left\{ \frac{0}{0}, \frac{0}{0,1}, \frac{0}{0,2}, \frac{0}{0,3}, \frac{0}{0,4}, \frac{0,1}{0,5}, \frac{0,2}{0,6}, \frac{0,3}{0,7}, \frac{0,6}{0,8}, \frac{0,9}{0,9}, \frac{1}{1} \right\}.$$

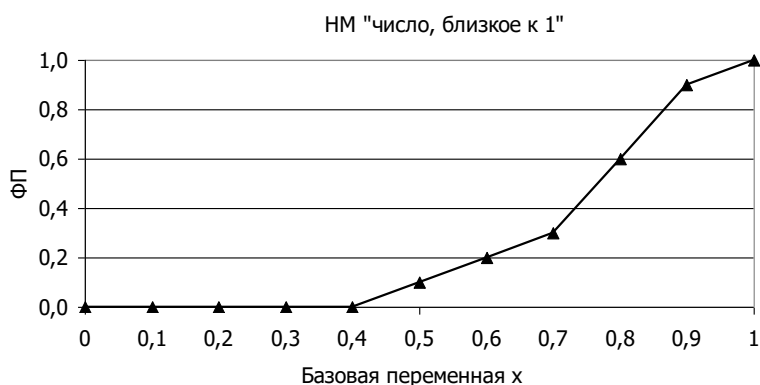
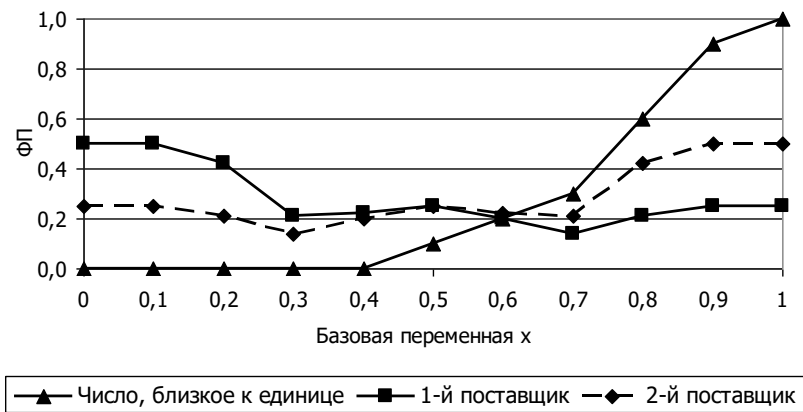


Рис. 35 – Функция принадлежности нечеткого множества S .

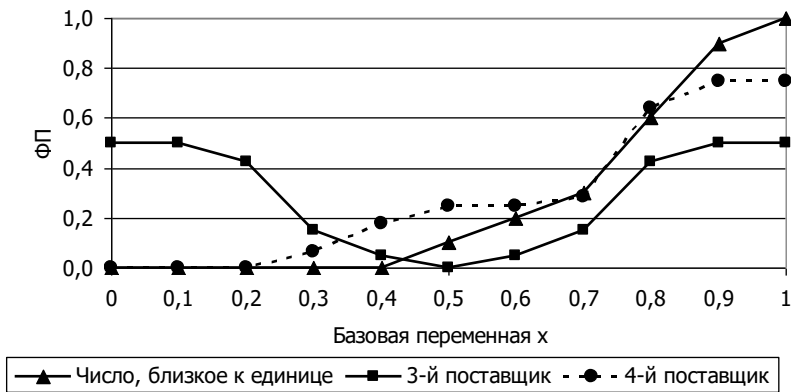
Естественно, что следует выбрать того поставщика, для которого лингвистическая переменная «привлекательность», полученная на этапе 3, отображается в нечеткое множество с минимальным расстоянием Хемминга от нечеткого множества «число, близкое к 1».

Расстояние Хемминга дает оценку расстояния между нечетким множеством «число, близкое к 1» и нечеткими множествами M_1 (привлекательность поставщика 1), M_2 (привлекательность поставщика 2), M_3 {привлекательность поставщика 3), M_4 {привлекательность поставщика 4).

На рис. 36 представлена графическая иллюстрация выше приведенных расчетов.



а)



б)

Рис. 36 – Функции совместимости поставщиков:
а) для 1-го и 2 –го поставщиков, б) для 3-го и 4 –го поставщиков

Из рисунка видно, что кривая функции совместимости для 4-го поставщика находится наиболее близко к кривой функции принадлежности «число, близкое к 1». Таким образом, даже предварительный (визуальный) анализ данных позволяет утверждать, что наиболее привлекателен 4-й поставщик.

Расстояния Хемминга обозначим d_1, d_2, d_3, d_4 и определим следующим образом:

♦ для привлекательности Поставщика 1:

$$d_1 = |0,5 - 0| + |0,5 - 0| + |0,425 - 0| + |0,2125 - 0| + |0,225 - 0| + |0,25 - 0,1| + |0,2 - 0,2| + |0,1375 - 0,3| + |0,2125 - 0,6| + |0,25 - 0,9| + |0,25 - 1| = 3,9625;$$

♦ для привлекательности Поставщика 2:

$$d_2 = |0,25 - 0| + |0,25 - 0| + |0,2125 - 0| + |0,1375 - 0| + |0,2 - 0| + |0,25 - 0,1| + |0,225 - 0,2| + |0,2125 - 0,3| + |0,425 - 0,6| + |0,5 - 0,9| + |0,5 - 1| = 2,3875;$$

♦ для привлекательности Поставщика 3:

$$d_3 = |0,5 - 0| + |0,5 - 0| + |0,425 - 0| + |0,15 - 0| + |0,05 - 0| + |0 - 0,1| + |0,05 - 0,2| + |0,15 - 0,3| + |0,425 - 0,6| + |0,5 - 0,9| + |0,5 - 1| = 3,1;$$

♦ для привлекательности Поставщика 4:

$$d_4 = |0 - 0| + |0 - 0| + |0 - 0| + |0,0625 - 0| + |0,175 - 0| + |0,25 - 0,1| + |0,25 - 0,2| + |0,2875 - 0,3| + |0,6375 - 0,6| + |0,75 - 0,9| + |0,75 - 1| = 1,45.$$

По критерию минимального расстояния Хемминга выбирается поставщик 4, так как $d_1 > d_3 > d_2 > d_4$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования. Рига.- Зинатне.- 1990.- 214 с.
2. Борисова Л.В., Димитров В.П. Особенности формализации знаний при логико-лингвистическом описании сложных технических систем.- Ростов н/Д, РГАСХМ.- 2006.- 236 с.
3. Димитров В.П., Борисова Л.В. Теоретические и прикладные аспекты разработки экспертных систем для технического обслуживания машин.- Ростов н/Д, ДГТУ.-2007.- 202 с.
4. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений.- В кн.: Математика сегодня.- М.: Знание, 1974- С. 5-49.
5. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений.- М.: Мир, 1976.- 165 с.
6. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
7. Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР.- М.: Энергоатомиздат, 1991.- 136 с.
8. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта/А.Н. Аверкин, И.З. Батыршин, А.Ф. Блишун, В.Б. Силов, В.Б. Тарасов. Под ред. Д.А. Поспелова.- М.: Наука, 1986.- 312 с.
9. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений/ А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьев и др.-М.: Радио и связь, 1989.- 304 с.

10. Прикладные нечеткие системы: Пер с япон./К. Асаи, Д. Ватада, С. Сугэно. – М.: Мир, 1993. – 368 с.

11. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. – М., Радио и связь, 1991.– 224 с.